الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ecole Supérieure des Sciences de Gestion -Annaba

Higher School of Management - Annaba

المدرسة العليا في علوم التسيير

-عنابة

Année 2019

Département Formation Préparatoire

COURS D'ANALYSE MATHEMATIQUES

Module

Analyse mathématiques 1 & 2

Spécialité

Sciences de gestion

Niveau

Première année

Présenté par

ASSALA AICHA

Année universitaire

2018-2019

Préface

Ce polycopié est dédié aux étudiants de la première année des classes préparatoires aux grandes écoles des sciences de gestion, il peut être aussi utile à ceux de la première année LMD pour les domaines Mathématiques et Informatique, Sciences et Techniques, Sciences de la Matière et Sciences de la Nature et de la Vie. Il a pour objectif d'introduire les principales notions et les outils mathématiques qui sont indispensables à toute formation en mathématiques appliquées aux sciences économiques et sciences de gestion afin de réussir dans les études supérieures.

La maîtrise des techniques utilisées dans cet ouvrage exige la connaissance des outils mathématiques faisant partie du programme de l'enseignement secondaire des étudiants.

Lors de la rédaction de ce travail, il a été pris en compte la clarté, la simplicité et la pédagogie de la présentation afin d'attirer l'attention du lecteur.

J'espère que ce polycopié va aider les étudiants à dégager des points clés permettant de structurer leur travail personnel et leur faciliter la lecture d'autres ouvrages.

L'auteur.

Table des matières

Introduction **1**

1 Ensembles, applications et nombres réels **2**

1.1 Ensembles 2

1.1.1 Définitions 2

1.1.2 Opérations élémentaires entre les sous-ensembles d'un ensemble E . 3

1.1.3 Notion de complémentaire 4

1.1.4 Produit cartésien 6

1.2 Applications 6

1.2.1 Définitions 6

1.2.2 Composition des applications 7

1.2.3 Image directe et image réciproque 8

1.2.4 Injectivité, surjectivité et bijectivité des applications 10

1.3 Nombres réels 15

1.3.1 Introduction 15

1.3.2 Propriétés de $\mathbb{R}$ 17

1.3.3 Partie entière d'un réel 19

1.3.4 Valeur absolue d'un réel 20

1.3.5 Parties majorées et minorées de $\mathbb{R}$ 21

1.3.6 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ 24

1.3.7 Identités remarquables et formule du binôme de Newton 26

1.3.8 Equations et inéquations avec les valeurs absolues dans $\mathbb{R}$ 28

2 Suites numériques **31**

2.1 Définitions . . . 31

2.1.1 Définition d'une suite . . . 31

2.1.2 Suites majorées, minorées et bornées . . . 32

2.1.3 Suites croissantes, décroissantes et constantes . . . 32

2.2 Limites . . . 34

2.2.1 Limites finies . . . 34

2.2.2 Limites infinies . . . 34

2.2.3 Nature d'une suite (convergence ou divergence d'une suite) . . . 35

2.2.4 Propriétés des limites . . . 36

2.2.5 Limites et inégalités . . . 38

2.3 Suites remarquables . . . 39

2.3.1 Suites arithmétiques . . . 39

2.3.2 Suites géométriques . . . 41

2.4 Convergence des suites monotones . . . 44

2.5 Suites adjacentes . . . 46

2.6 Suites récurrentes . . . 47

2.6.1 Suites récurrentes d'ordre1 . . . 47

2.6.2 Suites récurrentes d'ordre 2 . . . 48

2.7 Suites de Cauchy . . . 49

2.8 Sous-suites (Théorème de Bolzano-Weierstrass) . . . 50

3 Limites et continuité des fonctions **51**

3.1 Généralités sur les fonctions numériques . . . 51

3.1.1 Définitions . . . 51

3.1.2 Opérations sur les fonctions . . . 52

3.1.3 Fonctions bornées . . . 53

3.1.4 Parité, imparité et périodicité des fonctions . . . 54

3.1.5 Monotonie des fonctions . . . 55

3.2 Limites . . . 57

3.2.1 Définitions 57
3.2.2 Opérations sur les limites 61
3.2.3 Formes indéterminées (FI) 62
3.3 Continuité des fonctions 63
3.3.1 Définitions. 63
3.3.2 Opérations sur les fonctions continues 65
3.3.3 Prolongement par continuité 66
3.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues 67
3.4.1 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) 67
3.4.2 Théorème de la bijection (TB) 69
3.5 Etude des fonctions usuelles 70
3.5.1 Logarithme 70
3.5.2 Exponentielle 71
3.5.3 Exponentielle à base a et puissance 72
3.5.4 Fonctions circulaires (trigonométriques) 73

4 Dérivabilité des fonctions **77**
4.1 Définitions et propriétés des fonctions dérivables 77
4.1.1 Dérivée d'une fonction en un point 77
4.1.2 Interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction en un point 79
4.1.3 Dérivée à droite, dérivée à gauche 80
4.2 Différentielles 80
4.3 Dérivabilité et continuité 83
4.4 Dérivée sur un intervalle et fonction dérivée 84
4.4.1 Dérivée d'ordre supérieur 84
4.4.2 Opérations sur les fonctions dérivables 85
4.4.3 Dérivées des fonctions usuelles 85
4.4.4 Dérivée d'une fonction composée 86
4.4.5 Dérivée d'une fonction réciproque 86
4.4.6 Dérivée $n^{ième}$ d'un produit (formule de Leibniz) 87

4.5 Extremums . . . 87
4.5.1 Calcul pratique des extremums locaux . . . 88
4.6 Théorème de Rolle et accroissements finis . . . 90
4.6.1 Théorème de Rolle (TR) . . . 90
4.6.2 Théorème des accroissements finis (TAF) . . . 91
4.7 Règle de l'Hopital . . . 91

5 Développements limités **93**
5.1 Formules de Taylor . . . 93
5.1.1 Formule de Taylor avec reste de Lagrange au voisinage d'un point $a \neq 0$ . . . 93
5.1.2 Formule de Taylor avec reste de Lagrange au voisinage de $a = 0$ (ou Formule de Taylor-MacLaurin avec reste de Lagrange) . . . 94
5.1.3 Formule de Taylor-Young au voisinage d'un point $a \neq 0$ . . . 95
5.1.4 Formule de Taylor-Young au voisinage de $a = 0$ (ou Formule de MacLaurin-Young) . . . 95
5.2 Développements limités . . . 96
5.2.1 Développement limité d'une fonction au voisinage d'un point $a \neq 0$ 96
5.2.2 Développement limité d'une fonction au voisinage de $a = 0$ . . . 98
5.2.3 Opérations sur les DL . . . 99
5.2.4 Applications des DL . . . 102

6 Intégrales **106**
6.1 Construction d'une intégrale définie . . . 106
6.1.1 Définition d'une subdivision . . . 106
6.1.2 Intégrale de Riemann . . . 106
6.1.3 Intégrale d'une fonction en escalier . . . 108
6.1.4 Fonctions intégrables . . . 109
6.2 Propriétés de l'intégrale définie . . . 109
6.3 Primitive d'une fonction sur un intervalle . . . 110

6.3.1 Primitives des fonctions usuelles 111
6.4 Méthodes d'intégration 112
6.4.1 Méthode de changement de variable 112
6.4.2 Intégration par parties 113
6.4.3 Intégration des fractions rationnelles 114
6.4.4 Intégration des fonctions trigonométriques 117

Bibliographie **119**

Introduction

Les mathématiques !

Cette discipline qui a donné tant de sueurs froides à tant d'élèves et d'étudiants, car oui, les mathématiques sont partout, que vous ayez pour ambition d'aborder des études de sociologie, de psycologie, de physique où les mathématiques sont un outil préviligié, de biologie ou encore de gestion et d'économie, vous serez confronté à l'analyse d'intégrales, de fraction, de multiplication ou encore de fonctions trigonométriques.

Avoir de solides bases dans ce domaine, qui est devenu un outil indispensable pour l'innovation et les nouvelles technologies, était l'objectif principal fixé lors de la rédaction de ce polycopié. En outre, les chapitres traités sont conformes au programme établi en analyse dans les classes préparatoires aux grandes écoles des sciences de gestion.

En effet, cet ouvrage comporte six chapitres, le premier est une introduction aux ensembles, applications et nombres réels.

Dans le second chapitre, nous allons aborder les suites numériques.

Le troisième chapitre comporte l'étude des limites et de la continuité des fonctions numériques. La dérivabilité des fonctions sera détaillée dans le quatrième chapitre.

Nous allons ensuites traiter les développements limités dans le cinquième chapitre, et on termine par introduire la notion d'intégrale dans le dernier chapitre.

CHAPITRE 1

Ensembles, applications et nombres réels

1.1 Ensembles

1.1.1 Définitions

- Un ensemble E est une collection d'éléments qui vérifient la même propriété.

Exemple 1.1.1 $E_1 = \{rouge,\ noir\}$, $E_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$: *entiers impairs inférieurs à 10.*

- E est dit ensemble vide, noté ϕ ou $\{\}$, s'il ne contient aucun élément.
- On appelle cardinal de E, le nombre d'éléments de E.

Exemple 1.1.2 $Card\ E_1 = 2$, $Card\ E_2 = 5$.

- La relation définie entre l'ensemble E et ses éléments est l'appartenance. En effet, on note par $x \in E$ si x est un élément de E et par $x \notin E$ dans le cas contraire.

Exemple 1.1.3 $1 \in E_2$ *mais* $2 \notin E_2$.

- On note par $A \subset E$ pour dire que A est un sous-ensemble ou une partie de E, c'est-à-dire que tout élément de A est aussi un élément de E. Autrement dit,

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in E \tag{1.1.1}$$

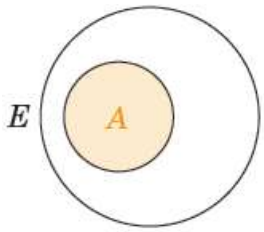


FIG.1.1. Notion d'inclusion

- A partir de l'ensemble E, on peut construire l'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$, où

$$Card\ \mathcal{P}(E) = 2^{Card\ E} \tag{1.1.2}$$

Exemple 1.1.4 *Si* $E = \{1, 2, 3\}$, $Card\ E = 3 \Longrightarrow Card\ \mathcal{P}(E) = 2^3 = 8$. *Donc,*

$$\mathcal{P}(E) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

1.1.2 Opérations élémentaires entre les sous-ensembles d'un ensemble E

Soient A et B deux sous-ensembles de E, on définit les quatres opérations élémentaires suivantes

- **Intersection**

$$A \cap B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \in B\} \tag{1.1.3}$$

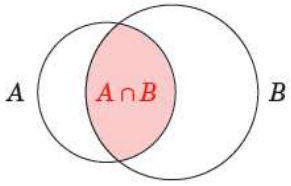


FIG.1.2. Notion d'intersection

- **Réunion**

$$A \cup B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ ou } x \in B\} \tag{1.1.4}$$

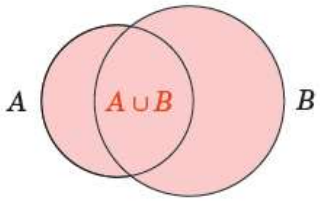


FIG.1.3. Notion de réunion

Remarque 1.1.1 *Le "ou" dans la définition n'est pas exclusif; x peut appartenir à A et à B en même temps.*

- **Inclusion**

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in E;\ x \in A \Longrightarrow x \in B \tag{1.1.5}$$

- **Egalité**

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in E;\ x \in A \Leftrightarrow x \in B \tag{1.1.6}$$

Autrement dit

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A \tag{1.1.7}$$

1.1.3 Notion de complémentaire

Définition 1.1.1 *Soient A et B deux sous-ensembles de E. Dire que x n'est pas dans A ($x \notin A$) revient à dire que x appartient au complémentaire de A dans E, noté par C_E^A ou $E \backslash A$.*

$$C_E^A = E \backslash A = \{x \in E,\ x \notin A\} \tag{1.1.8}$$

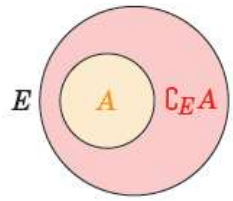


FIG.1.4. Notion de complémentaire

- *Si* $B \subset A$,

$$C_A^B = A \backslash B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \notin B\} \tag{1.1.9}$$

Remarque 1.1.2 *On peut déduire les régles de calculs suivantes*

- *Commutativité*

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A \tag{1.1.10}$$

- *Associativité*

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

- *Distributivité*

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

-

$$\begin{aligned} A \cup A &= A, \quad A \cup \phi = A \\ A \cap A &= A, \quad A \cap \phi = \phi \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

-

$$\begin{gathered} C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B, \quad C_E^{A \cap B} = C_E^A \cup C_E^B \\ A \cap C_E^A = \phi, \quad A \cup C_E^A = E \\ \text{Si } A \subset B \Longrightarrow C_E^B \subset C_E^A, \quad C_E^{C_E^A} = A \end{gathered} \tag{1.1.14}$$

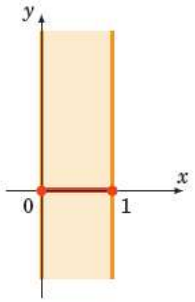
1.1.4 Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E \text{ et } y \in F\} \tag{1.1.15}$$

Exemple 1.1.5

$$[0.1] \times \mathbb{R} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \ \textit{et}\ y \in \mathbb{R}\}$$



Remarque 1.1.3 *On peut faire le produit cartésien de plusieurs ensembles*

$$A \times B \times C \times ... \times K \times ... = \{(x, y, z, ..., k, ...) : x \in A, y \in B, z \in C, ..., k \in K, ...\} \tag{1.1.16}$$

1.2 Applications

Soient E et F deux ensembles.

1.2.1 Définitions

- Une application $f : E \to F$ est la donnée, pour chaque élément $x \in E$, d'un unique élément $y \in F$, noté $f(x)$.
- Les applications peuvent être représentées par deux types d'illustrations

a.

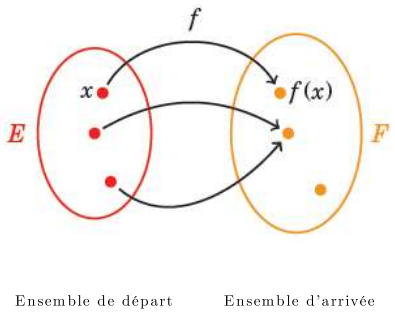


FIG.1.5. Notion d'application (1ère illustration)

Ici, l'association $x \longmapsto f(x)$ est représentée par une flèche.

b. L'ensemble de départ est représenté par l'axe des abscisses et celui d'arrivée par l'axe des ordonnées

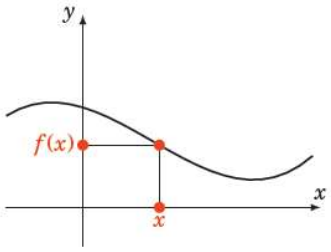


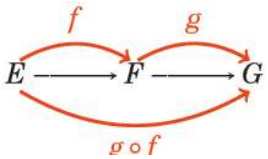
FIG.1.6. Notion d'application (2ème illustration)

Ici, l'association $x \longmapsto f(x)$ est représentée par le point $(x, f(x))$.

1.2.2 Composition des applications

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications, alors, $g \circ f : E \to G$ est l'application définie par

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \ \forall x \in E \tag{1.2.1}$$



Exemple 1.2.1 *Soient*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad]0,+\infty[&\to]0,+\infty[\\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g \quad : \quad]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x-1}{x+1} \end{aligned}$$

Alors, $g \circ f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ *vérifie pour tout* $x \in]0,+\infty[$

$$g \circ f\,(x) = g\,(f\,(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{1-x}{1+x} = -\frac{x-1}{x+1} = -g\,(x)$$

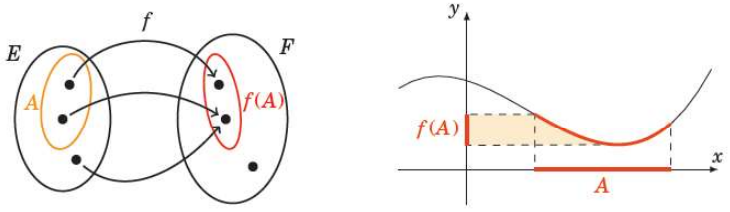
1.2.3 Image directe et image réciproque

Définition 1.2.1 *Soient* $A \subset E$ *et* $f : E \longrightarrow F$ *une application*

- *L'image directe du sous-ensemble* A *par l'application* f *est l'ensemble*

$$f\,(A) = \{f\,(x) \ \ \textit{tel que}\ x \in A\} \tag{1.2.2}$$

Exemple 1.2.2



- *L'image de l'application* f *est l'ensemble*

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F, \exists x \in \mathcal{D} : y = f\,(x)\} \subset F \tag{1.2.3}$$

où $\mathcal{D} \subset E$ *désigne le domaine de définition de l'application* f.

Exemple 1.2.3

1. *Soit*

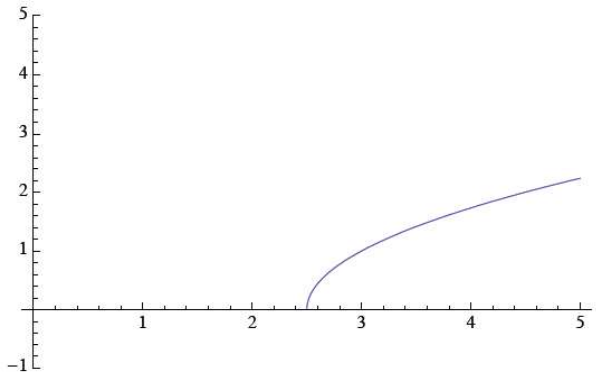
$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) = \sqrt{2x-5} \end{aligned}$$

Il est clair que $\mathcal{D} = \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$ *. Ainsi,*

$$\operatorname{Im} f = \left\{ y \in \mathbb{R}, \exists x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[: y = f(x) \right\}$$

$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{2x-5}$ *et on cherche* x *en fonction de* y*.*
En effet, $y^2 = 2x - 5 \Leftrightarrow 2x = y^2 + 5 \Leftrightarrow x = \frac{y^2+5}{2} \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right[\Leftrightarrow \frac{y^2+5}{2} \geq \frac{5}{2}$
$\Leftrightarrow y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0, +\infty[$ *. Par suite*

$$\operatorname{Im} f = [0, +\infty[$$



2.

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) = \sqrt{2x-3} + 1 \end{aligned}$$

$\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ *et* $y = f(x) \Leftrightarrow y - 1 = \sqrt{2x-3} \Leftrightarrow (y-1)^2 = 2x - 3$
$\Leftrightarrow x = \frac{(y-1)^2+3}{2} \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\Leftrightarrow (y-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1 \Leftrightarrow y \in [1, +\infty[$ *. Donc*

$$\operatorname{Im} f = \left\{ y \in \mathbb{R}, \exists x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\text{ tel que } y = f(x) \right\} = [1, +\infty[$$

3.

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathcal{D} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) = \frac{x-1}{x+1} \end{aligned}$$

$\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et $\operatorname{Im} f = \left\{ y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\} \text{ tel que } y = f(x) = \frac{x-1}{x+1} \right\}$. *Donc,* $y(x+1) = x - 1 \Longleftrightarrow xy + y = x - 1 \Leftrightarrow xy - x = -1 - y \Leftrightarrow x(y-1) = -1 - y$

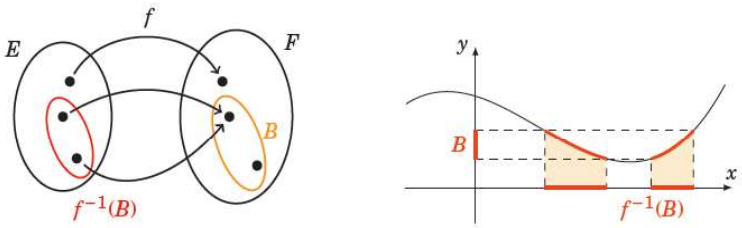
$\Longleftrightarrow x = \frac{1+y}{1-y}$. *Alors, y doit être différent de 1 pour que x soit défini, et donc* $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. *Par suite*

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

Définition 1.2.2 *Soient $B \subset F$ et $f : E \longrightarrow F$ une application. L'image réciproque du sous-ensemble B par l'application f est l'ensemble*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) \in B\} \tag{1.2.4}$$

Exemple 1.2.4



Remarque 1.2.1

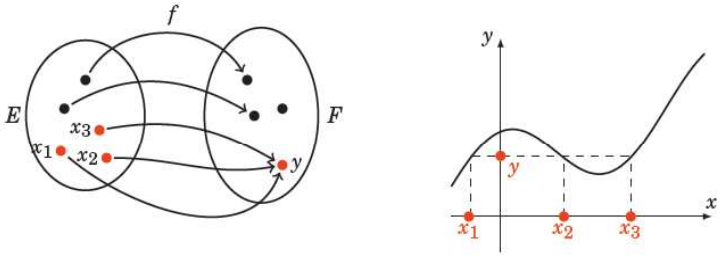
1. $f(A) \subset F$ *et* $f^{-1}(B) \subset E$.
2. *L'image réciproque $f^{-1}(B)$ d'un sous-ensemble B ne signifie pas que f est une application bijective (à voir par la suite); elle existe quelque soit l'application.*

1.2.4 Injectivité, surjectivité et bijectivité des applications

Soit $f : E \to F$ une application. Fixons $y \in F$.

- Tout élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$ est un antécédent de y par f.
- L'élément y est l'image de x par l'application f.

Exemple 1.2.5



Ici, l'élément y admet 3 antécédents par f qui sont x_1, x_2 et x_3.

Injectivité d'une application

Définition 1.2.3

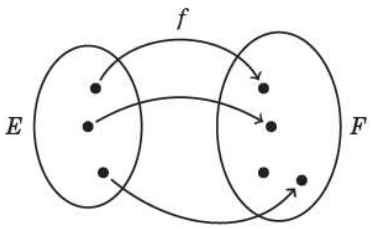
- *f est dite injective si*

$$\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \tag{1.2.5}$$

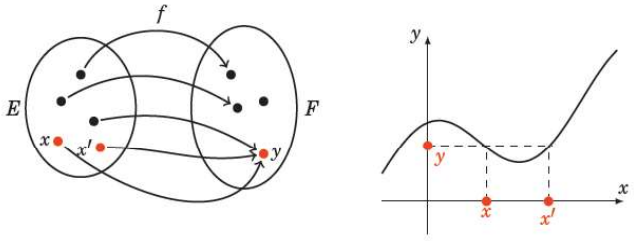
- *f est injective si et seulement si tout élément $y \in F$ a* au plus *un antécédent (et éventuellement aucun) dans E.*

Exemple 1.2.6

1. *Clairement, f est une application injective.*



2. *Ici, l'application f n'est pas injective car il existe $x \neq x'$ mais $f(x) \neq f(x')$*



3. *Soit l'application*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \\ & n \mapsto f(n) = \frac{1}{1+n} \end{aligned}$$

Pour étudier l'injectivité, prenons $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ *tels que* $f(n_1) = f(n_2)$. *Alors,* $\frac{1}{1+n_1} = \frac{1}{1+n_2} \Leftrightarrow 1+n_1 = 1+n_2 \Leftrightarrow n_1 = n_2$. *Ainsi,* f *est injective.*

4. *Soit l'application*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ & x \mapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

On peut remarquer qu'on peut trouver deux éléments $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, $x_1 \neq x_2$ *mais* $f(x_1) = f(x_2)$. *En effet, si* $x_1 = 2$ *et* $x_2 = -2$, $x_1 \neq x_2$ *et* $f(2) = f(-2) = 4$. *Ainsi,* f *n'est pas injective.*

Surjectivité d'une application

Définition 1.2.4

- f *est dite surjective si*

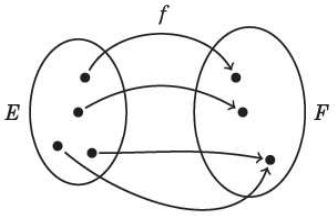
$$\forall y \in F,\ \exists x \in E : y = f(x) \tag{1.2.6}$$

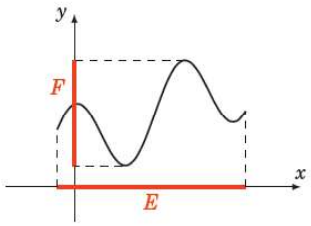
- f *est surjective si et seulement si tout élément* $y \in F$ *a* au moins *un antécédent dans* E.

- f *est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im} f = F$ *(ensemble d'arrivée).*

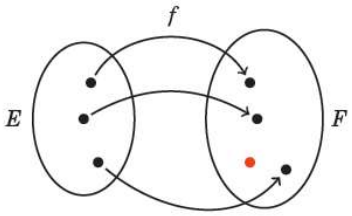
Exemple 1.2.7

1. *Les deux applications représentées ci-dessous sont surjectives*





2. *L'application suivante est non surjective, car il existe* $y \in F$ *qui n'admet pas d'antécédents dans* E.



3. *Soit*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \\ & n \mapsto f(n) = \frac{1}{1+n} \end{aligned}$$

Si $m \in \mathbb{Q}, \exists ? n \in \mathbb{N}$ *tel que* $m = f(n) \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{1+n} \Leftrightarrow m + mn = 1 \Leftrightarrow mn = 1 - m \Leftrightarrow n = \dfrac{1-m}{m}, m \in \mathbb{Q}$. *Si par exemple* $m = 2 \Rightarrow n = -\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. *Donc* f *n'est pas surjective car* $m = 2$ *n'a pas d'antécédent dans* $\mathbb{N}$.

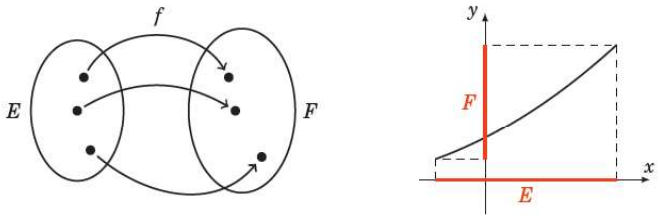
Bijectivité d'une application

Définition 1.2.5 *L'application* f *est dite bijective si et seulement si elle est injective et surjective à la fois. Ceci est équivaut à dire que pour tout* $y \in F$, *il existe un unique* $x \in E$ *tel que* $y = f(x)$. *Autrement dit*

$$\forall y \in F, \ \exists x \in E \text{ tel que } y = f(x) \tag{1.2.7}$$

Remarque 1.2.2 *L'existence de x vient de la surjectivité et l'unicité vient de l'injectivité, c'est à dire, tout élément y de F a un unique antécédent x de E par f.*

Exemple 1.2.8 *Les applications suivantes sont bijectives*



Proposition 1.2.1 *Soit $f : E \to F$ une application*

- *f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$*

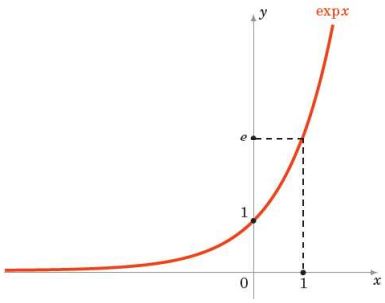
  où $Id_E : E \to E$ est l'application identité de E définie par $Id_E(x) = x$
  (resp. $Id_F : F \to F$ est l'application identité de F définie par $Id_F(y) = y$) qui vérifie

$$f \circ Id = Id \circ f = f \tag{1.2.8}$$

- *L'application g est unique et elle est aussi* bijective, *elle s'appelle la bijection réciproque de f notée f^{-1}. De plus, $(f^{-1})^{-1} = f$.*
- *$f \circ g = Id_F$ veut dire que $\forall y \in F : f(g(y)) = y$.*
- *$g \circ f = Id_E$ veut dire que $\forall x \in E : g(f(x)) = x$.*

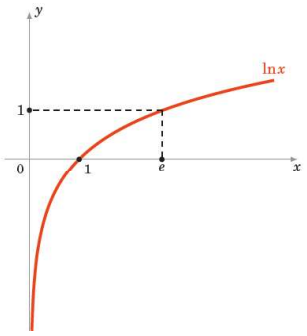
Exemple 1.2.9 *Soit*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R} \to]0, +\infty[\\ & x \mapsto f(x) = \exp x \end{aligned}$$



Cette application est clairement bijective et sa bijection réciproque est

$$\begin{aligned} g &:]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ & y \mapsto g(y) = \ln y \end{aligned}$$



et on a bien

$$\begin{aligned} \exp(\ln(y)) &= y, \ \forall y \in]0,+\infty[\\ \ln(\exp(x)) &= (x), \ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Proposition 1.2.2 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors, l'application $g \circ f : E \to G$ est bijective et sa bijection réciproque est*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \tag{1.2.9}$$

1.3 Nombres réels

1.3.1 Introduction

La théorie des ensembles a permis de construire l'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} \tag{1.3.1}$$

Si on a deux entiers naturels a et b; il n'existe pas toujours un élément $x \in \mathbb{N}$ tel que

$$a + x = b \tag{1.3.2}$$

A titre d'exemple, si $a = 1$ et $b = 0$, l'équation (1.3.2) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}$. Donc, on plonge $\mathbb{N}$ dans un ensemble plus grand noté $\mathbb{Z}$ et appelé l'ensemble des entiers relatifs, et dans lequel toute équation du type (1.3.2) admet une solution.

$$\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\} \tag{1.3.3}$$

et on a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \tag{1.3.4}$$

Maintenant, si on a deux entiers relatifs a ($a \neq 0$) et b tels que a ne divise pas b (i.e. la fraction $\dfrac{b}{a}$ est irréductible), il n'existe pas d'éléments dans $\mathbb{Z}$ tels que l'équation

$$ax = b \tag{1.3.5}$$

soit vérifiée. D'où la nécessité de construire un ensemble plus grand que $\mathbb{Z}$ dont les équations du type (1.3.5) admettent une solution. Cet ensemble est noté $\mathbb{Q}$ et est appelé l'ensemble des nombres rationnels.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,(\text{fraction irréductible}) \,\text{tels que}\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} \tag{1.3.6}$$

On a donc

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \tag{1.3.7}$$

Mais, dans l'ensemble $\mathbb{Q}$, l'équation

$$x^2 = 2 \tag{1.3.8}$$

par exemple n'a pas toujours de solutions dans $\mathbb{Q}$. En effet, raisonnons par l'absurde, c'est à dire, supposons le contraire

$$\exists x \in \mathbb{Q} \text{ tel que } x^2 = 2$$

mais si $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ tels que $x = \dfrac{p}{q}$ est irréductible. Donc, $x^2 = \dfrac{p^2}{q^2} = 2$

$\Leftrightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ est pair$\Rightarrow p$ est pair$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2n$. D'autre part, $p^2 = 2q^2$ veut dire que $p^2 = 4n^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2n^2 \Rightarrow q^2$ est pair et par suite, q est pair. Ainsi, p et q sont deux entiers pairs, ce qui contredit l'hypothèse d'irréductibilité de la fraction $\dfrac{p}{q}$.

Donc, on plonge l'ensemble $\mathbb{Q}$ dans un ensemble plus vaste appelé l'ensemble des nombres réels et est noté $\mathbb{R}$ dans lequel les équations du type (1.3.8) admettent une solution.

Enfin, on a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \tag{1.3.9}$$

Remarque 1.3.1 *Il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels; ces nombres sont dits irrationnels. On note par* $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *l'ensemble des nombres irrationnels qui est défini par*

$$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \text{ et } x \notin \mathbb{Q}\} \tag{1.3.10}$$

Autrement dit, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *est le complémentaire de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Il est donc naturel d'écrire*

$$\mathbb{R} = \{\mathbb{Q}\} \cup \{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\} \tag{1.3.11}$$

Exemple 1.3.1 $e, \pi, \sqrt{2}$ *sont des nombres irrationnels.*

1.3.2 Propriétés de $\mathbb{R}$

Première propriété : opérations

Ce sont les opérations que vous avez toujours pratiquées. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a

$$a + b = b + a,$$
$$0 + a = a,$$
$$a + b = 0 \Leftrightarrow a = -b,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c),$$
$$a \times b = b \times a,$$
$$1 \times a = a \text{ si } a \neq 0,$$
$$a \times b = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{b},$$
$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c),$$
$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c,$$
$$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

On résume toutes ces propriétés en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Deuxième propriété : relation d'ordre

Définition 1.3.1 *Soit E un ensemble*

1. *Pour $x, y \in E$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$ pour signifier qu'il y a une correspondance entre les éléments de E.*

2. *Une relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E si*

- *$\mathcal{R}$ est reflexive*

$$\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x \tag{1.3.12}$$

- *$\mathcal{R}$ est antisymétrique*

$$\forall x, y \in E, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y \tag{1.3.13}$$

- *$\mathcal{R}$ est transitive*

$$\forall x, y, z \in E, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z \tag{1.3.14}$$

3. *Si l'ensemble E est muni d'une relation d'ordre, on dit que $(E, \mathcal{R})$ est ordonné.*

Exemple 1.3.2 *La relation " $\leq$ " est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.*

Définition 1.3.2 *Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E est dite totale si*

$$\forall x, y \in E, \ x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x \tag{1.3.15}$$

Dans ce cas, on dit que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble totalement ordonné.

Théorème 1.3.1 *La relation " $\leq$ " sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre, et de plus, elle est totale. Autrement dit, $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.*

Preuve. En effet

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq x, \\
&\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Longrightarrow x = y, \\
&\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z, \\
&\forall x, y \in \mathbb{R}, \text{ on a } x \leq y \text{ ou } y \leq x.
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.3.2

1. $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, *on a par définition*

$$x\leq y\Leftrightarrow y-x\geq 0 \tag{1.3.16}$$

$$x<y\Leftrightarrow x\leq y\ et\ x\neq y \tag{1.3.17}$$

2. *Les opérations de* $\mathbb{R}$ *sont compatibles avec la relation d'ordre* " $\leq$ " *au sens suivant,* $\forall a,b,c,d\in\mathbb{R}$

$$a\leq b\text{ et }c\leq d\Rightarrow a+c\leq b+d \tag{1.3.18}$$

$$a\leq b\text{ et }c\geq 0\Rightarrow a\times c\leq b\times c \tag{1.3.19}$$

$$a\leq b\text{ et }c\leq 0\Rightarrow a\times c\geq b\times c \tag{1.3.20}$$

Troisième propriété : propriété d'Archimède

L'ensemble $\mathbb{R}$ est Archimédien, c'est à dire

$$\forall x\in\mathbb{R},\exists n\in\mathbb{N},\ n>x \tag{1.3.21}$$

Autrement dit, pour tout réel x, il existe un entier naturel n strictement plus grand que x.

Remarque 1.3.3 *Cette propriété peut sembler évidente, mais elle est essentielle puisqu'elle permet de définir la partie entière d'un nombre réel.*

1.3.3 Partie entière d'un réel

Définition 1.3.3 *Soit* $x\in\mathbb{R}$*, il existe un unique entier relatif noté* $E(x)$ *qui vérifie*

$$E(x)\leq x<E(x)+1 \tag{1.3.22}$$

$E(x)$ *s'appelle la partie entière de* x.

Exemple 1.3.3

$$E(2.853) = 2 \ car \ 2 \leq 2.853 < 3$$
$$E(\pi) = 3 \ car \ 3 \leq 3.14 < 4$$
$$E(-3.5) = -4 \ car \ -4 \leq -3.5 < -3$$
$$E(3) = 3 \ car \ 3 \leq 3 < 4$$

Remarque 1.3.4 *On note aussi* $E(x) = [x]$.

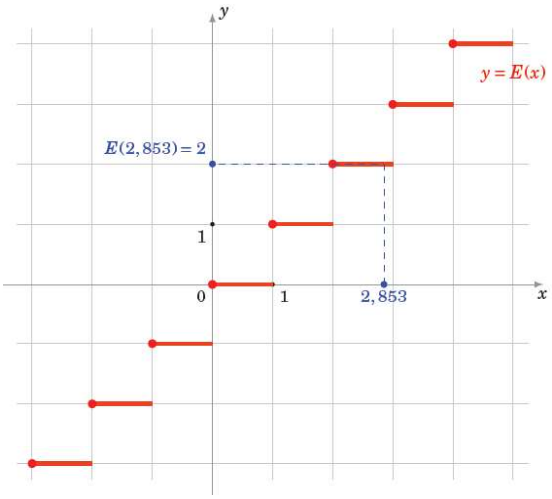


FIG.1.7. Graphe de la fonction $x \mapsto E(x)$

1.3.4 Valeur absolue d'un réel

Pour un nombre réel x, on définit la valeur absolue de x par

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{1.3.23}$$

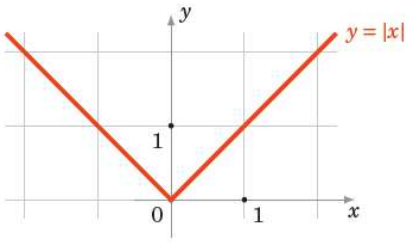


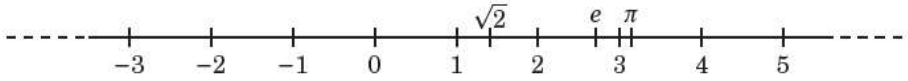
FIG.1.8. Graphe de la fonction $x \mapsto |x|$

Propriétés $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall a > 0$

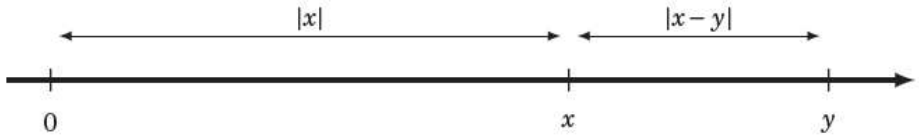
1. $|x| \geq 0$, d'où $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et si $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.
2. $|x| = |-x|$, $\sqrt{x^2} = |x|$
3. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ et si $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$.
4. $|xy| = |x|\,|y|$, $|x| = \max(-x, x)$ où $\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq y,\ y \in \mathbb{R} \\ y, & \text{si } y \geq x \end{cases}$
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$ Inégalié triangulaire.
6. $||x| - |y|| \leq |x - y|$ Seconde inégalité triangulaire.

Remarque 1.3.5

1. *On représente souvent les nombres réels sur une droite numérique*



2. *Sur la droite numérique, $|x - y|$ représente la distance entre les réels x et y. En particulier, $|x|$ représente la distance entre les réels x et 0.*



1.3.5 Parties majorées et minorées de $\mathbb{R}$

Majorants et minorants

Définition 1.3.4 *Soit E un ensemble non vide totalement ordonné et soit A une partie non vide de E.*

1. *On dit que $M \in E$ est un majorant de A (ou A est majorée par M) si et seulement si*

$$\forall x \in A;\ x \leq M \tag{1.3.24}$$

2. *On dit que $m \in E$ est un minorant de A (ou A est minorée par m) si et seulement si*

$$\forall x \in A;\ x \geq m \tag{1.3.25}$$

Exemple 1.3.4 *Soient $E = \mathbb{N}$ et $A = \{1, 2, 3\}$.*

Ici, $M = 3$ ou $M = 4$ ou $M = 5$... sont tous des majorants de A car $1 < 3$, $2 < 3$ et $3 \leq 3$.... De même, $m = 0$ ou $m = 1$ sont les minorants de A car $1 > 0$, $2 > 0$ et $3 > 0$...

3. *Si M est un majorant de A qui appartient à A, alors, il est unique pour cette propriété; on l'appellera le plus grand élément de A et on le note $M = \max A$ (le maximum de A).*

4. *Si m est un minorant de A qui appartient à A, alors, il est unique pour cette propriété; on l'appellera le plus petit élément de A et on le note $m = \min A$ (le minimum de A).*

Exemple 1.3.5 *Pour l'exemple précédent*

- *3 est le seul majorant qui appartient à A, donc 3 est le plus grand élément de A, d'où $\max A = 3$.*
- *1 est le seul minorant qui appartient à A, donc 1 est le plus petit élément de A, d'où $\min A = 3$.*

Borne supérieure et borne inférieure

1. *Si A est une partie majorée de E et si l'ensemble de ses majorants a un plus petit élément α, alors, α est la borne supérieure de A et elle est notée $\sup A$. Autrement dit, la borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A.*

2. *Si A est une partie minorée de E et si l'ensemble de ses minorants a un plus grand élément β, alors, β est la borne inférieure de A et elle est notée* $\inf A$. *Autrement dit, la borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A.*

Exemple 1.3.6 *Gardons le même exemple précédent.*

- *L'ensemble des majorants de A est* $\{3, 4, 5, ...\}$. *Ainsi,* 3 *est le plus petit des majorants, donc,* $\sup A = 3$.
- *De même, l'ensemble des minorants est* $\{0, 1\}$, *et comme* 1 *est le plus grand des minorants, donc,* $\inf A = 1$.

Remarque 1.3.6

a. *Si la partie A est majorée et minorée à la fois, on dit qu'elle est bornée et on écrit*

$$\forall x \in A, \exists m, M \in E : m \leq x \leq M \tag{1.3.26}$$

b. *Lorsque les bornes sup et inf existent, elles sont uniques.*

Exemple 1.3.7 *L'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$ est borné puisqu'il est majoré et minoré à la fois.*

- **Axiome de la borne supérieure (ABS)**

Soit A une partie non vide de l'ensemble E

$$\alpha = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \alpha \text{ est un majorant de } A \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \leq \alpha \\ 2.\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > \alpha - \varepsilon \\ (\text{i.e. } \alpha \text{ est le plus petit des majorants}) \end{cases} \tag{1.3.27}$$

où $\varepsilon \in \mathbb{R}$ est très très très...petit, proche de 0.

- **Axiome de la borne inférieure (ABI)**

Soit A une partie non vide de l'ensemble E

$$\beta = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \beta \text{ est un minorant de } A \Leftrightarrow \forall x \in A,\ x \geq \beta \\ 2.\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < \beta + \varepsilon \\ (\text{i.e. } \beta \text{ est le plus grand des minorants}) \end{cases} \tag{1.3.28}$$

Exemple 1.3.8 *Soit* $E = \mathbb{R}$ *et* $A = [0, 1[$.

Il est clair que tout ce qui est à gauche de 0 (*y compris le* 0) *sont des minorants de* A, *c'est à dire*

$$\forall m \in]-\infty, 0],\ m \text{ est un minorant}$$

et tout ce qui est à droite de 1 (*y compris le* 1) *sont des majorants de* A, *c'est à dire*

$$\forall M \in [1, +\infty[,\ M \text{ est un majorant}$$

Donc, A *est bornée, ce qui implique l'existence des bornes inférieure et supérieure. Plus précisement,* 1 *est le plus petit des majorants de* A, *donc* $\sup A = 1$, *et* 0 *est le plus grand des minorants de* A, *donc* $\inf A = 0$.

On remarque aussi que 1 *est un majorant qui n'appartient pas à* A, *donc le maximum de* A *n'existe pas. Par contre,* $0 \in A$ *et donc* $\min A = 0$.

1.3.6 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Intervalles

Ce sont des ensembles particuliers de $\mathbb{R}$.

a. Intervalles bornées : Soient $a, b \in \mathbb{R}$

- Intervalle ouvert

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\} \tag{1.3.29}$$

- Intervalle fermé

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\} \tag{1.3.30}$$

- Intervalle semi-ouvert à droite

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\} \tag{1.3.31}$$

- Intervalle semi-ouvert à gauche

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\} \tag{1.3.32}$$

b. Intervalles non bornées : Soit $a \in \mathbb{R}$

- $$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R},\ x < a\} \tag{1.3.33}$$

- $$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq a\} \tag{1.3.34}$$

- $$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x \geq a\} \tag{1.3.35}$$

- $$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ x > a\} \tag{1.3.36}$$

Remarque 1.3.7 *L'ensemble* $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ *n'est pas borné car il n'est ni majoré ni minoré, mais, si on lui rajoute* $+\infty$ *et* $-\infty$*, il devient borné, et on écrit*

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \tag{1.3.37}$$

Il s'appelle dans ce cas la droite numérique achevée.

Notation 1.3.1

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\} = [0, +\infty[$$
$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\} =]0, +\infty[$$
$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\} =]-\infty, 0]$$
$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\} =]-\infty, 0[$$

Densité

Définition 1.3.5 *On dit qu'une partie non vide A est dense dans un ensemble E si et seulement si*

$$\forall x, y \in E,\ \exists r \in A : x < r < y \tag{1.3.38}$$

Exemple 1.3.9

1. *L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y \tag{1.3.39}$$

   Autrement dit, tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.

2. *L'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$.*

1.3.7 Identités remarquables et formule du binôme de Newton

Identités remarquables

On appelle identité l'égalité de deux expressions algébriques équivalentes. Voici quelques identités particulières

$$\begin{aligned} &(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ \ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ &(a+b)(a-b) = a^2 - b^2,\ \ (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \end{aligned} \tag{1.3.40}$$

Formule du binôme de Newton

a. Coefficients du binôme. Ces coefficients sont notés par C_n^k qui peuvent etre calculés en utilisant la formule

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!},\ n, k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 0 \leq k \leq n \tag{1.3.41}$$

où

$$n! = n(n-1)(n-2)...3.2.1 \tag{1.3.42}$$

est le factorielle de n, avec $1! = 1$ et par convention, $0! = 1$.

Propriétés

$$\begin{aligned} &C_n^0 = 1,\ C_n^1 = n,\ C_n^n = 1 \\ &C_n^{n-k} = C_n^k,\ C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^k + ... + C_n^n = 2^n \\ &C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \end{aligned} \tag{1.3.43}$$

b. Formule du binôme. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et n un entier positif, alors

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \\ &= C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n a^0 b^n \end{aligned} \tag{1.3.44}$$

Exemple 1.3.10

1.

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= \sum_{k=0}^{3} C_3^k a^{3-k} b^k = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 a^0 b^3 \\ &= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

2. *Déterminons le coefficient de $x^6 y^4$ dans le développement de $(x^3 + 2y)^6$.*

Ici, $a = x^3$, $b = 2y$ et $n = 6$, alors

$$\left(x^3 + 2y\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k \left(x^3\right)^{6-k} (2y)^k$$

Donc, pour obtenir le coefficient de $x^6 y^4$, on remplace par $k = 4$. Ainsi,

$$\begin{aligned} C_6^4 \left(x^3\right)^{6-4} 2^4 y^4 &= 16 C_6^4 \left(x^3\right)^2 y^4 \\ &= 16 \frac{6!}{2!4!} x^6 y^4 \\ &= 16 \frac{6.5}{2} x^6 y^4 \\ &= 16.15 x^6 y^4 \\ &= 240 x^6 y^4 \end{aligned}$$

Finalement, le coefficient cherché est 240.

1.3.8 Equations et inéquations avec les valeurs absolues dans $\mathbb{R}$

Equations

Exemple 1.3.11 *On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante*

$$|-3x+4|+|x-5|=10 \qquad (E_1)$$

On doit tout d'abord déterminer les valeurs frontières de chaque valeur absolue

$$\begin{cases} -3x+4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3} \\ x-5=0 \Leftrightarrow x=5 \end{cases}$$

On remplit ensuite un tableau de la forme

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
$\lvert -3x+4\rvert$	$-3x+4$		0	$3x-4$	11	$3x-4$	
$\lvert -5+x\rvert$	$5-x$		$\frac{11}{3}$	$5-x$	0	$-5+x$	
(E_1)	$-4x+9=10$ $x=-\frac{1}{4}$ possible			$2x+1=10$ $x=\frac{9}{2}$ possible		$4x-9=10$ $x=\frac{19}{4}$ impossible	

On obtient alors deux solutions et l'ensemble de solutions sera

$$S=\left\{-\frac{1}{4},\frac{9}{2}\right\}$$

Inéquations

Exemple 1.3.12

1. $3x-5\geq x-2 \Leftrightarrow 3x-x\geq 5-2 \Leftrightarrow 2x\geq 3 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow S=\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right[$
2. $$|2x-1|\leq |x+2| \qquad (E_2)$$

- **1ère méthode**

Les valeurs frontières de chaque valeur absolue sont

$$\begin{cases} 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2} \\ x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \end{cases}$$

On remplit ensuite le tableau

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$	$-2x+1$		5	$-2x+1$	0	$2x-1$	
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$		0	$x+2$	$\frac{5}{2}$	$x+2$	
(E_2)	$-2x+1 \leqslant -x-2$ $x \geqslant 3$ impossible $S_1=\varnothing$		$-2x+1 \leqslant x+2$ $x \geqslant -\frac{1}{3}$ $S_2=\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$		$2x-1 \leqslant x+2$ $x \leqslant 3$ $S_3=\left[\frac{1}{2};3\right]$		

On obtient alors l'ensemble de solutions

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left[-\frac{1}{3}, 3\right]$$

- **2ème méthode**

On peut procéder de la manière suivante

$$\begin{aligned} |2x-1| &\leq |x+2| \Leftrightarrow (2x-1)^2 \leq (x+2)^2 \\ &\Leftrightarrow 4x^2-4x+1 \leq x^2+4x+4 \\ &\Leftrightarrow 3x^2-8x-3 \leq 0 \end{aligned}$$

Clairement, on doit calculer

$$\begin{aligned} \Delta &= 64-4.3.(-3)=100 \\ x_1 &= \frac{8-10}{6}=-\frac{1}{3},\ x_2=\frac{8+10}{6}=3 \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$3x^2 - 8x - 3 = \left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 3) \leq 0$$

Ainsi, l'ensemble de solution sera

$$S = \left[-\frac{1}{3}, 3\right]$$

CHAPITRE 2

Suites numériques

2.1 Définitions

2.1.1 Définition d'une suite

Une suite réelle $u(n)$ est une liste ordonnée de nombres réeles, où n parcourant tous les nombres entiers. Ce n'est donc rien d'autre qu'une application à valeurs réelles, dont l'ensemble de définition est l'ensemble $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u \quad &: \quad \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ &\quad n \mapsto u(n) \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

où l'on note u_n plutôt que $u(n)$. L'élément u_n est appelé le terme général de la suite qui est défini en fonction de n, et donc, une suite est l'ensemble de tous les termes et est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 2.1.1

- $(\sqrt{n})_{n\geq 0}$ *est la suite de termes* $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ...$
- $((-1)^n)_{n\geq 0}$ *est la suite qui alterne* $+1, -1, +1, -1, ...$
- *La formule* $u_n = \dfrac{9n-20}{n^2}$ *définit une suite dont les premiers termes sont* $u_1 = -11$, $u_2 = -\dfrac{1}{2}$, $u_3 = \dfrac{7}{9}, ...$

2.1.2 Suites majorées, minorées et bornées

Définition 2.1.1

- *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite majorée si*

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in N,\ u_n \leq M \tag{2.1.2}$$

- *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite minorée si*

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in N,\ u_n \geq m \tag{2.1.3}$$

- *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite bornée si*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall n \in N,\ \ |u_n| \leq \alpha \tag{2.1.4}$$

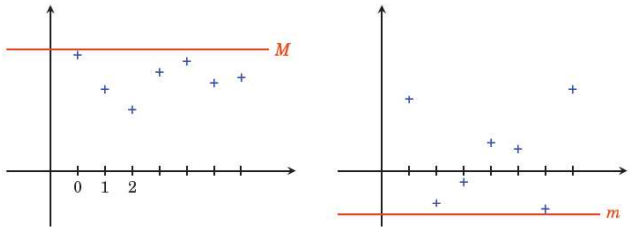


FIG.2.1. Suite majorée à gauche, suite minorée à droite

2.1.3 Suites croissantes, décroissantes et constantes

Définitions

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite constante si le terme général ne dépend pas de n.

Exemple 2.1.2 $u_n = \sqrt{3}$ *est une suite constante.*

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante (resp. décroissante) ssi

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n \text{ (resp.} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n) \tag{2.1.5}$$

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite strictement croissante (resp. strictement décroissante) ssi

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n \text{ (resp.} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n) \tag{2.1.6}$$

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite croissante (resp. décroissante) à partir d'un indice N si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $n \geq N$

$$u_{n+1} \geq u_n \text{ (resp. } u_{n+1} \leq u_n) \tag{2.1.7}$$

Exemple 2.1.3 *Reprenons l'exemple ci-dessus,*

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{9n-20}{n^2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{-9n^2+31n+20}{n^2\left(n+1\right)^2} \\ &= -\frac{\left(n-4\right)\left(9n+5\right)}{n^2\left(n+1\right)^2} < 0, \ \forall n \geq 5 \end{aligned}$$

Donc, cette suite est strictement décroissante à partir de l'indice $N = 5$.

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite monotone (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Remarque 2.1.1 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes strictement positifs, elle est croissante (resp. décroissante) ssi*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \ \textit{(resp.} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1) \tag{2.1.8}$$

Exemple 2.1.4

- *Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$u_n = n^2 - n - 2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc cette suite est croissante.

- *Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{2^n}{3^n}$. On a*

$$u_n = \frac{2^n}{3^n} > 0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^n} = \frac{3}{2} < 1$$

Ce qui prouve que la suite est strictement décroissante.

2.2 Limites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite

2.2.1 Limites finies

Définition 2.2.1 *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon \tag{2.2.1}$$

On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est proche d'aussi prés que l'on veut de l, à partir d'un certain rang N

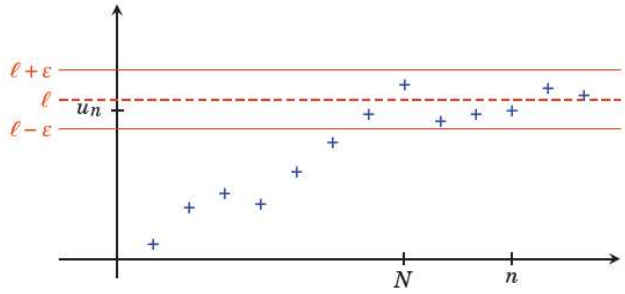


FIG.2.2. Suite ayant une limite finie l

2.2.2 Limites infinies

Définition 2.2.2

- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si*

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n \geq N \Rightarrow u_n > A \tag{2.2.2}$$

- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si*

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} :\ n \geq N \Rightarrow u_n < -A \tag{2.2.3}$$

Remarque 2.2.1

- *On note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *ou parfois* $u_n \to_{n\to+\infty} l$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$.
- *Dans la définition* (2.1.9) , N *dépend de* ε *et on ne peut pas changer l'ordre de* $\forall$ *et* $\exists$.
- $|u_n - l| < \varepsilon$ *signifie* $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$.

2.2.3 Nature d'une suite (convergence ou divergence d'une suite)

Définition 2.2.3 *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente vers le réel* l *si elle admet une limite finie* ($u_n = \dfrac{1}{n} \to_{n\to+\infty} 0$). *Elle est divergente sinon, autrement dit, soit la suite tend vers* $\pm\infty$, *soit elle n'admet pas de limite* ($u_n = n \to_{n\to+\infty} +\infty$).

Proposition 2.2.1 *Si une suite est convergente, sa limite est unique.*

Preuve. Supposons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l et l'. Soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux entiers N_1 et N_2 tels que

$$\begin{aligned} \forall n \quad &\geq \quad N_1 : \quad |u_n - l| < \varepsilon \\ \forall n \quad &\geq \quad N_2 : \quad |u_n - l'| < \varepsilon \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Si on prend $N = \max(N_1, N_2)$, donc, pour tout $n \geq N$, on a

$$|l - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| \leq 2\varepsilon \tag{2.2.5}$$

Ce qui prouve que $|l - l'| \leq 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, donc $l = l'$. ■

Proposition 2.2.2 ***(Condition nécessaire de convergence)*** *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers $l \in \mathbb{R}$. En appliquant la définition de la limite (2.1.9) pour $\varepsilon = 1$, on peut écrire pour $n \geq N$

$$|u_n| = |l + (u_n - l)| \leq |l| + |u_n - l| \leq |l| + 1 \tag{2.2.6}$$

Ce qui donne, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|u_n| \leq \max\left(|u_0|, |u_1|, ..., |u_{N-1}|, |l| + 1\right) = \alpha \tag{2.2.7}$$

Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. ■

Remarque 2.2.2 *Une suite bornée n'admet pas forcément une limite.*

Exemple 2.2.1 $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.2.1 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs. S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a*

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha > 1 \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge.*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha = 1 \Rightarrow$ *on ne peut rien dire.*

Exemple 2.2.2 *Soit $a > 0$ un réel. Etudions la nature de la suite $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$*

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a^n.a}{(n+1).n!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a}{n+1}\right| = 0 < 1 \end{aligned}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2.2.4 Propriétés des limites

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$

Opérations sur les limites finies

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $(l \in \mathbb{R})$, alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l \tag{2.2.8}$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, $(l, l' \in \mathbb{R})$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l + l', \quad \lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = l \times l' \tag{2.2.9}$$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $(l \in \mathbb{R}^*)$, alors si $u_n \neq 0$ pour n assez grand

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l} \tag{2.2.10}$$

Exemple 2.2.3 *Soit* $u_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, $l = 2 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{n}{2n+1} \to_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{l}$.

Opérations sur les limites infinies

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = 0 \tag{2.2.11}$$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty \tag{2.2.12}$$

Exemple 2.2.4 $\lim\limits_{n\to+\infty} (\underbrace{\dfrac{1}{n}}_{u_n} + \underbrace{n^2}_{v_n}) = +\infty$.

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = +\infty \tag{2.2.13}$$

Exemple 2.2.5 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\underbrace{\frac{1}{n}}_{u_n}\times\underbrace{n^2}_{v_n})=+\infty.$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ et $u_n>0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n}=+\infty \tag{2.2.14}$$

Exemple 2.2.6 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}}=+\infty.$

Proposition 2.2.3 *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*est une suite bornée et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite qui tend vers 0, alors*

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)=0 \tag{2.2.15}$$

Exemple 2.2.7 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n}}=0$ *car* $-1\leq u_n=\cos n\leq 1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$

2.2.5 Limites et inégalités

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq v_n$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}u_n\leq\lim_{n\to+\infty}v_n \tag{2.2.16}$$

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq v_n$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty \tag{2.2.17}$$

(resp. si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n\leq u_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$)

- **Théorème d'encadrement ou des gendarmes**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites qui vérifient

$$\forall n\in\mathbb{N},u_n\leq v_n\leq w_n \tag{2.2.18}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=l=\lim_{n\to+\infty}w_n \tag{2.2.19}$$

alors,

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=l \tag{2.2.20}$$

Remarque 2.2.3

- *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergente telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.
- *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, *on ne peut pas affirmer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$ *mais* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.

Exemple 2.2.8 $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ *est une suite à termes strictement positifs mais*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

2.3 Suites remarquables

2.3.1 Suites arithmétiques

Définition 2.3.1 *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite arithmétique s'il existe un nombre réel* r, *appelé raison de la suite tel que*

$$u_{n+1} = u_n + r, \ \forall n \tag{2.3.1}$$

Exemple 2.3.1

- *La suite des entiers naturels*

$$0, 1, 2, 3, ...$$

- *La suite des nombres pairs*

$$0, 2, 4, 6, ...$$

- *La suite définie par* : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n = 5n - 2 \Rightarrow u_{n+1} = 5n + 5 - 2 = u_n + 5$$

est une suite arithmétique de raison $r = 5$.

Relation entre les termes (expression du terme général)

Théorème 2.3.1 *Considérons la suite arithmétique* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de premier terme* u_0 *et de raison* r*, alors*

- $\forall n \geq 1$

$$u_n = u_0 + nr \tag{2.3.2}$$

- *D'une manière générale,* $\forall m, p \in \mathbb{N}$

$$u_m = u_p + (m-p)\, r \tag{2.3.3}$$

Preuve. 1. On démontre la relation (2.3.2) par récurrence. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, la relation (2.3.2) est vraie pour $n = 1$. Donc $u_1 = u_0 + r$. Supposons que la relation (2.3.2) est vraie jusqu'a l'ordre n et montrons que $u_{n+1} = u_0 + (n+1)\, r$ est vraie. En effet, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, donc

$$u_{n+1} = u_n + r \tag{2.3.4}$$

Ainsi, en utilisant la relation (2.3.2) dans (2.3.4) , on aura

$$u_{n+1} = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)\, r \tag{2.3.5}$$

qui est le résultat cherché.

2. D'après le point précédent

$$u_m = u_0 + mr \text{ et } u_p = u_0 + pr \tag{2.3.6}$$

d'où

$$u_m - u_p = mr - pr = (m-p)\, r \tag{2.3.7}$$

Ce qui démontre la relation (2.3.3) . ■

Somme des termes

La somme des termes d'une suite arithmétique est donnée par

$$\mathcal{S}_n = \textit{nombre de termes} \times \frac{1^{er}\ \textit{terme+dernier terme}}{2} \tag{2.3.8}$$

Exemple 2.3.2 *Calculons* $\mathcal{S}_{10} = u_0 + ... + u_{10}$ *pour la suite* $u_n = 5n - 2$. *En effet,*

$$\mathcal{S}_{10} = 11 \times \frac{-2 + 48}{2} = 253$$

Nature d'une suite arithmétique

Considérons la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 et de raison r, alors

1. Si $r > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (la suite diverge).
2. Si $r < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (la suite diverge).
3. Si $r = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$ (la suite converge).

2.3.2 Suites géométriques

Définition 2.3.2 *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite géométrique s'il existe un nombre réel* q *appelé raison tel que*

$$u_{n+1} = u_n \times q,\ \forall n \tag{2.3.9}$$

Exemple 2.3.3

- *La suite des puissances successives de 2*

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, ...$$

- *La suite définie par* : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n = (-1)^n = (+1, -1, +1, ...)$$

- *La suite définie par* : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$u_n = 2 \times 3^n \Rightarrow u_{n+1} = 2 \times 3^n \times 3 = u_n \times 3$$

est une suite géométrique de raison $q = 3$.

Relation entre les termes (expression du terme général)

Théorème 2.3.2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 0$. Alors*

- $\forall n \geq 1$

$$u_n = u_0.q^n \tag{2.3.10}$$

- *D'une manière générale,* $\forall m, p \in \mathbb{N}$, $(m > p)$,

$$u_m = u_p.q^{m-p} \tag{2.3.11}$$

Preuve. 1. On démontre la relation (2.3.10) par récurrence. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, la relation (2.3.10) est vraie pour $n = 1$. Donc $u_1 = u_0.q$. Supposons que la relation (2.3.10) est vraie jusqu'a l'ordre n et montrons que $u_{n+1} = u_0.q^{n+1}$ est vraie. En effet, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, donc

$$u_{n+1} = u_n.q \tag{2.3.12}$$

Ainsi, en utilisant la relation (2.3.10) dans (2.3.12) , on aura

$$u_{n+1} = u_0.q^n.q = u_0.q^{n+1}$$

qui est le résultat cherché.

2. D'après le point précédent

$$u_m = u_0.q^m \text{ et } u_p = u_0.q^p \tag{2.3.13}$$

d'où, puisque $q \neq 0$

$$\frac{u_m}{u_p} = \frac{q^m}{q^p} = q^{m-p} \tag{2.3.14}$$

Ce qui démontre la relation (2.3.11) . ■

Nature d'une suite géométrique

Proposition 2.3.1 *Fixons un réel a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = q^n$ (suite géométrique du premier terme $u_0 = 1$ et de raison q), alors*

1. *Si* $q = 1 \Rightarrow$ *la suite converge.*

2. *Si* $q > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *(la suite diverge).*

3. *Si* $-1 < q < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *(la suite converge).*

4. *Si* $q \leq -1 \Rightarrow$ *la suite diverge.*

Preuve. Rappelons d'abord l'inégalité de Bernoulli, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \tag{2.3.15}$$

1. Si $q = 1$, la suite est donc constante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$. Par conséquent, la suite converge.

2. Si $q > 1 \Rightarrow q - 1 > 0$. Posons donc $x = q - 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_+^*$. En appliquant l'inégalité de Bernoulli, on peut écrire

$$q^n = (1+x)^n \geq 1 + nx \tag{2.3.16}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} 1 + nx = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, ce qui montre que la suite est divergente.

3. Si $-1 < q < 1$. On peut rencontrer deux cas

a. $q = 0$, le résultat est évident (suite constante).

b. $q \neq 0$, posons $q' = \dfrac{1}{|q|} \Leftrightarrow q' > 1$ car $|q| < 1$. On peut donc écrire d'après 2.

$$\lim_{n\to+\infty} q'^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|q|^n} = +\infty \tag{2.3.17}$$

Par passage à l'inverse, $\lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$, ce qui montre que la suite est convergente vers 0.

4. Si $q \leq -1$. Raisonnons par l'absurde, supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \quad &> \quad 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad -\varepsilon < u_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad u_n \in\ ]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\ \text{ (intervalle de centre } l) \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Prenons par exemple $I = \left]\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}\right[$ qui est un intervalle centré en l, d'après notre hypothèse,

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq N \Rightarrow u_n \in \left]\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}\right[\tag{2.3.19}$$

$$\Leftrightarrow \frac{l}{2} < u_n < \frac{3l}{2} \tag{2.3.20}$$

Or, si n est pair, alors

$$u_n = q^n > 0 \Leftrightarrow \frac{l}{2} > 0 \Leftrightarrow l > 0 \tag{2.3.21}$$

et si n est impair, alors

$$u_n = q^n < 0 \Leftrightarrow \frac{3l}{2} < 0 \Leftrightarrow l < 0 \tag{2.3.22}$$

D'où la contradiction, ce qui montre que la suite est divergente. ■

Somme des termes

La somme des termes d'une suite géométrique est donnée par

$$\mathcal{S}_n = \textit{premier terme} \times \frac{1 - q^{\textit{nombre de termes}}}{1 - q} \tag{2.3.23}$$

Par conséquent, si $|q| < 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{S}_n = \textit{premier terme} \times \frac{1}{1 - q} \tag{2.3.24}$$

2.4 Convergence des suites monotones

Théorème 2.4.1

- *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
- *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*
- *Une suite croissante qui n'est pas majorée tend vers* $+\infty$.
- *Une suite décroissante qui n'est pas minorée tend vers* $-\infty$.

Exemple 2.4.1

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite de terme général*

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

- *Etudier la monotonie de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
- *Démontrer que* $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$, $\forall n \in N^*$.
- *En déduire la convergence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

En effet

- *Il est clair que*

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Par suite,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement croissante.*

- *Montrons par récurrence que* $\forall n \geq 1$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

En effet, pour $n = 1$, *on a* $u_1 = 1 \leq 1 = 2 - \frac{1}{1}$. *Supposons que* $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ *et montrons que*

$$u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

Comme

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Or,

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

ce qui achève la récurrence.

- *Finalement,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente puisqu'elle est croissante et majorée par* 2.

2. *La suite* $u_n = \frac{1}{n}$ *est clairement décroissante et minorée par* 0, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *donc, elle converge.*

2.5 Suites adjacentes

Définition 2.5.1 *Deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont dites adjacentes si*

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$

Ceci est équivalent à écrire

$$u_0\leq u_1\leq u_2\leq ...\leq u_n\leq ...\leq v_n\leq ...\leq v_2\leq v_1\leq v_0 \tag{2.5.1}$$

Théorème 2.5.1 *Si deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes, elles convergent vers la même limite.*

Preuve. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $v_0 \Leftrightarrow$ elle converge vers l, et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $u_0 \Leftrightarrow$ elle converge vers l'. D'où

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=l'-l=0\Leftrightarrow l=l'$$

■

Exemple 2.5.1 *Vérifions* $\forall n\in\mathbb{N}^*$ *si les suites* $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ *et* $v_n=u_n+\dfrac{2}{n+1}$ *sont adjacentes. En effet*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}\Rightarrow u_{n+1}-u_n=1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-1-\frac{1}{2^2}-...-\frac{1}{n^2} \\ &\Leftrightarrow \quad u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0\Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \frac{2}{n+2} \Rightarrow v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2}{n+2} - \frac{2}{n+1} \\ &= \frac{n+2+2(n+1)^2 - 2(n+1)(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \\ &= \frac{n+2+2(n^2+2n+1) - 2(n^2+2n+n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \\ &= \frac{n+2+2n^2+4n+2-2n^2-6n-4}{(n+1)^2(n+2)} \\ &= \frac{-n}{(n+1)^2(n+2)} < 0 \Leftrightarrow (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

De plus,

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1} = 0$$

Donc, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes.*

2.6 Suites récurrentes

2.6.1 Suites récurrentes d'ordre1

Définition 2.6.1 *Soit* f *une fonction. Une suite récurrente* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'ordre* 1 *est définie par*

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \text{ (premier terme)} \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ (relation de récurrence)} \end{cases} \tag{2.6.1}$$

Ainsi, la suite s'écrit

$$u_0, u_1 = f(u_0), u_2 = f(u_1), ... \tag{2.6.2}$$

Exemple 2.6.1 *Soit* $f(x) = 1 + \sqrt{x}$. *Fixons* $u_0 = 2$ *et* $\forall n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$, *donc, la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'écrit*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = 1 + \sqrt{u_0} = 1 + \sqrt{2} \\ u_2 = 1 + \sqrt{u_1} = 1 + \sqrt{1+\sqrt{2}} \\ ... \end{array}$$

Proposition 2.6.1 *Si f est une fonction continue et la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers une limite l, alors, l est une solution de l'équation $l = f(l)$.*

Exemple 2.6.2 *Soit $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

Clairement, f est continue. D'après la proposition, si la suite converge vers l, cette limite vérifie

$$\begin{aligned} l &= f(l) \Leftrightarrow l = \sqrt{l+2} \Leftrightarrow l^2 - l - 2 = 0 \\ \Delta &= 9 \Rightarrow l_1 = -1 \text{ et } l_2 = 2 \end{aligned}$$

Or, $u_n > 0$, $\forall n \geq 0$, donc, la seule limite est $l = 2$.

Remarque 2.6.1 *Si la fonction f est croissante. Alors*

- *Si $u_1 - u_0 \geq 0 \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.*
- *Si $u_1 - u_0 \leq 0 \Rightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*

Preuve. $u_1 \geq u_0$ et f est croissante$\Rightarrow u_2 = f(u_1) \geq f(u_0) = u_1$. Ensuite, $u_2 \geq u_1$ et f est croissante$\Rightarrow u_3 = f(u_2) \geq f(u_1) = u_2, \ldots$ ■

Exemple 2.6.3 *Prenons le même exemple précédent, $f(x) = \sqrt{x+2}$ est croissante $(f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0)$. Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car $u_1 - u_0 = \sqrt{3} - 1 > 0$.*

2.6.2 Suites récurrentes d'ordre 2

Définition 2.6.2 *Une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ordre 2 est définie par ses deux premiers termes et une relation de récurrence.*

Exemple 2.6.4

$$\begin{cases} u_0 = 1, \ u_1 = 2, \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n, \ \forall n \geq 0 \end{cases}$$

2.7 Suites de Cauchy

Définition 2.7.1 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ n \geq m \geq N : |u_n - u_m| < \varepsilon \tag{2.7.1}$$

Autrement dit, on cherche le rang N pour lequel $|u_n - u_m| < \varepsilon$.

Proposition 2.7.1 *Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy converge.*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de Cauchy}$$

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l, donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N : |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

En particulier, si $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq N : |u_m - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |u_n - u_m| &= |u_n - l + l - u_m| \leq |u_n - l| + |l - u_m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. ■

Remarque 2.7.1

- *L'intérêt de la suite de Cauchy est qu'elle nous aide à démontrer la convergence d'une suite sans connaître sa limite.*
- *Elle est aussi utilisée pour démontrer la divergence d'une suite*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas de Cauchy} \Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}$$

Exemple 2.7.1 *Montrons que $u_n = \dfrac{1}{n}$ est une suite de Cauchy. En effet*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \underline{N_?} \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ n \geq m \geq N : |u_n - u_m| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |u_n - u_m| &= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = \left|\frac{m-n}{nm}\right| \leq \frac{m+n}{nm} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &\Leftrightarrow |u_n - u_m| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{m} \ (car\ n \geq m \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}) \end{aligned}$$

Donc, pour que $|u_n - u_m|$ *soit inférieure à* ε*, il suffit que* $\frac{2}{m} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < m$*. Alors, il suffit de choisir* N *le premier entier supérieur à* $\frac{2}{\varepsilon}$ *pour que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit de Cauchy.*
Finalement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy* $\Leftrightarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

2.8 Sous-suites (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

Théorème 2.8.1 *Toute suite bornée admet au-moins une sous-suite convergente.*

Exemple 2.8.1

1. *La suite* $u_n = (-1)^n$ *est bornée car* $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ *et elle n'est pas convergente.D'après le théorème de Bolzano, on peut extraire 2 sous-suites*

$$\begin{array}{l} u_{2n} = (-1)^{2n} \to_{n\to+\infty} 1 \\ u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \to_{n\to+\infty} -1 \end{array} \quad \text{qui sont convergentes.}$$

2. *Soit la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & \text{si } n = 3k,\ k \in \mathbb{N} \\ 1 + \dfrac{1}{k}, & \text{si } n = 3k+1,\ k \in \mathbb{N}^* \\ 2, & \text{si } n = 3k+2,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Cette suite est clairement bornée $\left(\frac{1}{3} \leq u_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}\right)$ *et divergente puisqu'elle admet trois limites différentes), mais, les trois sous-suites*

$$\begin{array}{l} (u_{3k})_{k\in\mathbb{N}} = (u_0, u_3, u_6, ...) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, ...\right) \\ (u_{3k+1})_{k\in\mathbb{N}^*} = (u_4, u_7, u_{10}, ...) = \left(2, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, ...\right) \\ (u_{3k+2})_{k\in\mathbb{N}} = (u_2, u_5, u_8, ...) = (2, 2, 2, ...) \end{array}$$

Convergent vers les limites respectives $\frac{1}{3}, 1$ *et* 2*.*

CHAPITRE 3

Limites et continuité des fonctions

3.1 Généralités sur les fonctions numériques

3.1.1 Définitions

a. On appelle fonction numérique sur un ensemble E, toute application $f : E \to \mathbb{R}$.

- Si $E \subset \mathbb{R}$ (E est une partie de $\mathbb{R}$), on dit que f est une fonction numérique (réelle) d'une variable réelle, et on écrit

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad E \to \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto f(x) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

b. E est en général un intervalle ou une réunion d'intervalles qui s'appelle le domaine de définition de la fonction f et il est noté par $\mathcal{D}_f$.

Exemple 3.1.1 *La fonction* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *est bien définie si et seulement si* $x \neq 0$. *Donc*

$$\mathcal{D}_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

c. Le graphe (ou la courbe représentative) d'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) noté Γ_f est une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)),\ x \in E\} \tag{3.1.2}$$

Autrement dit, c'est l'ensemble de couples $(x, f(x))$ où x parcourt E. Ainsi, on trace le graphe de f en joignant les points $(x, f(x))$.

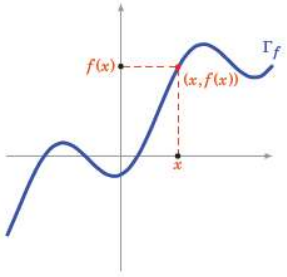


FIG.3.1. Courbe représentative d'une fonction f

3.1.2 Opérations sur les fonctions

Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie $E \subset \mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes

- La somme de f et g est la fonction

$$\begin{aligned} f+g \quad &: \quad E \to \mathbb{R} \\ &\qquad x \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{aligned}$$

- Le produit de f et g est la fonction

$$\begin{aligned} f \times g \quad &: \quad E \to \mathbb{R} \\ &\qquad x \mapsto (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \end{aligned}$$

- La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction

$$\begin{aligned} \lambda f \quad &: \quad E \to \mathbb{R} \\ &\qquad x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{aligned}$$

- f est dite inférieure ou égale à g (resp. supérieure ou égale), et on note $f \leq g$ (resp. $f \geq g$) ssi $\forall x \in E : f(x) \leq g(x)$ (resp. $\forall x \in E : f(x) \geq g(x)$).

- f est dite positive (resp. strictement positive) sur E ssi $\forall x \in E : f(x) \geq 0$ (resp. $\forall x \in E : f(x) > 0$).
- f est dite négative (resp. strictement négative) sur E ssi $\forall x \in E : f(x) \leq 0$ (resp. $\forall x \in E : f(x) < 0$).
- f est dite constante sur E ssi $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in E : f(x) = a$.
- f est dite nulle sur E ssi $\forall x \in E : f(x) = 0$.

3.1.3 Fonctions bornées

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- f est majorée sur E ssi

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M, \forall x \in E \tag{3.1.3}$$

- f est minorée sur E ssi

$$\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m, \forall x \in E \tag{3.1.4}$$

- f est bornée sur E ssi elle est majorée et minorée à la fois sur E. Autrement dit

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M, \forall x \in E \tag{3.1.5}$$

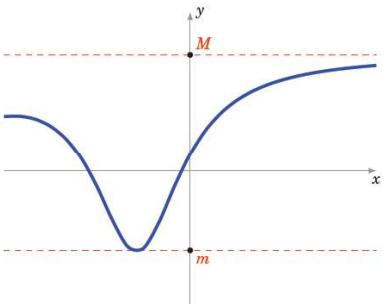


FIG.3.2. Exemple d'une fonction bornée

3.1.4 Parité, imparité et périodicité des fonctions

a. Un domaine $\mathcal{D}$ est dit symétrique par rapport à 0 si $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$. Autrement dit, un intervalle $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 s'il est de la forme

$$]-a,a[\text{ ou } [-a,a] \text{ ou }]-\infty,+\infty[\quad \left(a \in \mathbb{R}_+^*\right) \tag{3.1.6}$$

b. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $\mathcal{D}$ un domaine symétrique par rapport à 0.

- f est dite paire si

$$f(-x) = f(x), \ \forall x \in \mathcal{D} \tag{3.1.7}$$

Exemple 3.1.2 *$f(x) = x^2$ est une fonction paire car $\mathcal{D}_f =]-\infty,+\infty[$ (symétrique par rapport à 0)* et

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

- f est dite impaire si

$$f(-x) = -f(x), \ \forall x \in \mathcal{D} \tag{3.1.8}$$

Exemple 3.1.3 *$f(x) = x^3$ est une fonction impaire car $\mathcal{D}_f =]-\infty,+\infty[$ (symétrique par rapport à 0) et*

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Remarque 3.1.1 *Graphiquement*

- *f est paire $\Leftrightarrow$ son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*
- *f est impaire $\Leftrightarrow$ son graphe est symétrique par rapport à l'origine.*

Exemple 3.1.4

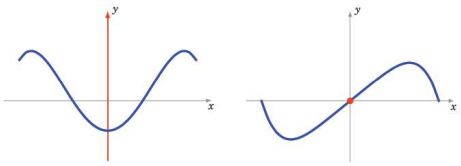


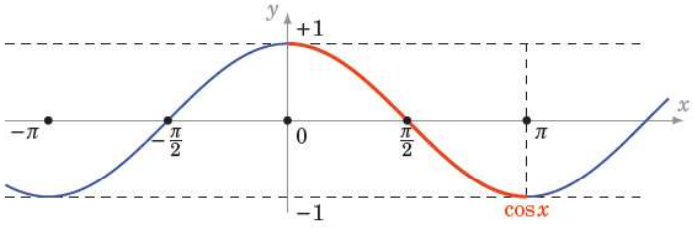
FIG.3.3. Fonction paire à gauche, fonction impaire à droite

Donc, pour étudier une fonction paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$ puis de compléter par symétrie.

c. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $T \in \mathbb{R}_+^*$ (un réel strictement positif). On dit que f est périodique de période T (ou encore $T-$périodique) si

$$f(x+T) = f(x), \ \forall x, \ x+T \in \mathcal{D} \tag{3.1.9}$$

Exemple 3.1.5 *la fonction $f(x) = \cos x$ est une fonction $2\pi-$périodique*



Donc, la périodicité est une propriété de répétition. Autrement dit, pour étudier une telle fonction, il suffit de s'intéresser à un intervalle de longueur T, puis de compléter par des translations.

3.1.5 Monotonie des fonctions

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

- f est croissante (resp. strictement croissante) sur E si $\forall x, y \in E$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \ \text{ (resp. } x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \text{)} \tag{3.1.10}$$

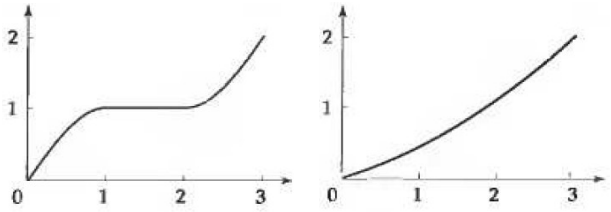


FIG.3.4. Fonctions croissante à gauche, strictement croissante à droite

- f est décroissante (resp. strictement décroissante) sur E si $\forall x, y \in E$

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \text{ (resp. } x < y \Rightarrow f(x) > f(y)\text{)} \tag{3.1.11}$$

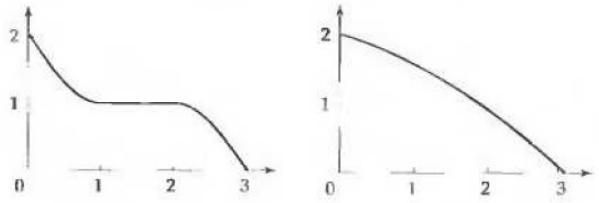


FIG.3.5.Fonctions décroissante à gauche, strictement décroissante à droite

- f est monotone (resp. strictement monotone) sur E si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur E.

Remarque 3.1.2 *Si f est croissante $\Leftrightarrow$ $(-f)$ est décroissante.*

Exemple 3.1.6 *$f(x) = x$ est clairement croissante $\Leftrightarrow$ $-f(x) = -x$ est décroissante.*

Proposition 3.1.1 *Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions*

a. *Si f et g sont croissantes sur $E \Longrightarrow$ la somme $f + g$ l'est aussi.*

b. *Si $f \geq 0$ et $g \geq 0$ sur E. Alors : f et g croissantes $\Longrightarrow$ le produit $f \times g$ l'est aussi.*

Proposition 3.1.2 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to \mathbb{R}$ $(E, F \subset \mathbb{R})$ deux fonctions*

a. *Si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, alors, leur composée $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ est croissante.*

b. *Si l'une des fonctions f ou g est croissante, l'autre étant décroissante, alors leur composée est décroissante.*

Théorème 3.1.1 *Si f est strictement monotone, alors f est injective.*

Preuve. Par hypothèse, f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Si f est strictement croissante

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 < x_2 \text{ ou} \\ x_2 < x_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(x_1) < f(x_2) \text{ ou} \\ f(x_2) < f(x_1) \end{array} \right. \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

et si f est strictement décroissante

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 < x_2 \text{ ou} \\ x_2 < x_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f(x_1) > f(x_2) \text{ ou} \\ f(x_2) > f(x_1) \end{array} \right. \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

■

Remarque 3.1.3 *Très souvent, on étudie la monotonie d'une fonction f en étudiant le signe de sa dérivée.*

$$\begin{aligned} \text{Si } f'(x) &> 0, \forall x \in E \Rightarrow f \text{ est croissante} \\ \text{Si } f'(x) &< 0, \forall x \in E \Rightarrow f \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

3.2 Limites

3.2.1 Définitions

Limite finie en un point x_0

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I. On dit que $f(x)$ tend vers une limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x_0, et on note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \tag{3.2.1}$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \quad > \quad 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ : -\eta < x - x_0 < \eta \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \\ : x_0 - \eta < x < x_0 + \eta \Longrightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

On voit donc que dans cette définition, c'est un problème d'existence de η.

Géométriquement

L'image de l'intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ est incluse dans l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$, ou encore

$$f(]x_0 - \eta, x_0 + \eta[) \subset]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\tag{3.2.3}$$

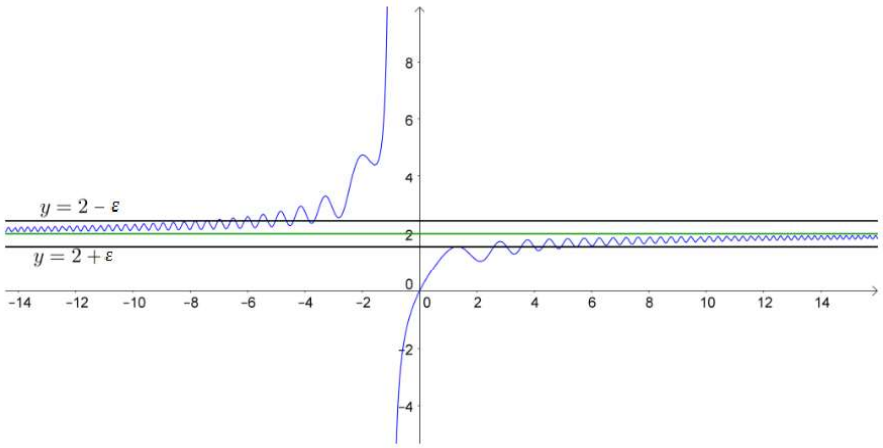


FIG.3.6. Exemple d'une fonction ayant pour limite $l = 2$

Exemple 3.2.1

1. *Calculons puis appliquons la définition de la limite en un point pour*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2$$

Il est clair que $l = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - 0| < \eta \Rightarrow \left|x^2 - 0\right| < \varepsilon$$

Cherchons $\eta(\varepsilon)$. *Comme* $|x^2| = x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}$, *il suffit donc de prendre* $\eta = \sqrt{\varepsilon}$ *pour que* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

2. *Même question pour* $\lim_{x\to 1}(3x-2) = 1$, $l = 1$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x-1| < \eta \Rightarrow |3x-2-1-0| = |3x-3| < \varepsilon$$

On peut donc écrire

$$3|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Il suffit donc de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ *pour que* $\lim_{x\to 1}(3x-2) = 1$.

Limite finie à gauche et à droite en un point x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$ (a et b peuvent être infinis).

- On dit que f a une limite $l \in \mathbb{R}$ à droite au point x_0 et on note $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{3.2.4}$$

- On dit que f a une limite $l \in \mathbb{R}$ à gauche au point x_0 et on note $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{3.2.5}$$

- *Si* $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_1$ *et* $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_2$, *on dira que* f *admet une limite en* x_0 *si et seulement si* $l_1 = l_2$.

- *Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.*

Exemple 3.2.2 *Soit*

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ &\quad x \ \mapsto f(x) = \frac{|x|}{x} \end{aligned}$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1 = l_1$ *et* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 = l_2$. *Comme* $l_1 \neq l_2$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ *n'existe pas.*

Cas où x_0 devient infini avec une limite $l < \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists A > 0 : x > A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{3.2.6}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists A > 0 : x < -A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{3.2.7}$$

Exemple 3.2.3 $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$, *donc*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists A > 0, x > A \Rightarrow \left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \left|\frac{x+1-x}{x}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \varepsilon$$

Comme $x > A > 0$, *on peut donc écrire* $\dfrac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{\varepsilon}$. *Il suffit donc de prendre*

$$A = \frac{1}{\varepsilon}$$

Cas où la limite $l = \pm\infty$ et $x_0 < \infty$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A \tag{3.2.8}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I : |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < -A \tag{3.2.9}$$

Exemple 3.2.4 $\lim_{x\to1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$, *donc*

$$\forall A > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} : |x-1| < \eta \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} > A$$

$$\Leftrightarrow (1-x)^2 < \frac{1}{A} \Leftrightarrow |1-x| < \frac{1}{\sqrt{A}} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Il suffit donc de prendre $\eta = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$.

Cas où $l = \pm\infty$ et $x_0 = \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, x > B \Rightarrow f(x) > A \tag{3.2.10}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, x < -B \Rightarrow f(x) > A \tag{3.2.11}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, x > B \Rightarrow f(x) < -A \tag{3.2.12}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, x < -B \Rightarrow f(x) < -A \tag{3.2.13}$$

Exemple 3.2.5 $\lim_{x\to+\infty} 2x^2 - 4 = +\infty$, *donc*

$$\forall A > 0, \exists B > 0, x > B \Rightarrow 2x^2 - 4 > A$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 > \frac{A}{2} \Leftrightarrow x^2 > \frac{A}{2} + 2 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{A}{2} + 2} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{A}{2} + 2}$$

Il suffit donc de prendre $B = \sqrt{\frac{A}{2} + 2}$.

Remarque 3.2.1 *On a les limites classiques suivantes :* $\forall n \geq 1$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \tfrac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

3.2.2 Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions avec $x_0 < \infty$ ou $x_0 = \pm\infty$ telles que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \text{ et } \lim_{x\to x_0} g(x) = l'$$

Alors,

- $\lim_{x\to x_0} (f+g) = l + l', \quad \lim_{x\to x_0} (f \times g) = l \times l', \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = \frac{l}{l'}$ si $l' \neq 0$.
- $\lim_{x\to x_0} (\lambda f) = \lambda l, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- Si $f \leq g \Longrightarrow l \leq l', \quad$ si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ avec $f \leq g \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

- Si $f \leq g \leq h$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$ (Théorème des gendarmes)

Proposition 3.2.1 ***(Limite d'une fonction composée)*** *Soient f et g deux fonctions. Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = l$. Alors, $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = l$.*

Exemple 3.2.6 *Soit $x \longmapsto u(x)$ une fonction telle que $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 2$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $H(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{u^2(x)} + \ln(u(x))}$. Calculons $\lim\limits_{x\to x_0} H(x)$.*

On remarque que H est composée de deux fonctions :

$$\text{la racine } (g(y) = \sqrt{y}) \text{ et } f(x) = 1 + \frac{1}{u^2(x)} + \ln(u(x))$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (1 + \frac{1}{u^2(x)} + \ln(u(x))) = 1 + \frac{1}{4} + \ln 2 = y_0$$

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = \lim_{y\to y_0} \sqrt{y} = \sqrt{y_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \ln 2} = l$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to x_0} H(x) = \lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = l = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \ln 2}$$

3.2.3 Formes indéterminées (FI)

$$+\infty - \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ 1^{\infty} \tag{3.2.14}$$

Exemple 3.2.7

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x+5} = 1^{\infty}$ *FI*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+5} = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{5}\right] = e \times 1 = e$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{3x} = 1^{\infty}$ *FI*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3} = e^3$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=1^{\infty}$ *FI*

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{2\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{2}=e^{2}$$

où $y=\dfrac{x}{2}$, *lorsque* $x\to+\infty\Leftrightarrow y\to+\infty$.

3.3 Continuité des fonctions

3.3.1 Définitions.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction.

a. f est dite continue en $x_0\in I$ si et seulement si

$$\begin{gathered}\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\\ \Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x\in I:|x-x_0|<\eta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\end{gathered}\tag{3.3.1}$$

b. f est dite continue à droite en x_0 si et seulement si

$$\begin{gathered}\lim_{x\to x_0^{+}}f(x)=f(x_0)\\ \Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x\in I:x_0\leq x<x_0+\eta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\end{gathered}\tag{3.3.2}$$

c. f est dite continue à gauche en x_0 si et seulement si

$$\begin{gathered}\lim_{x\to x_0^{-}}f(x)=f(x_0)\\ \Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,\forall x\in I:x_0-\eta\leq x<x_0\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\end{gathered}\tag{3.3.3}$$

Remarque 3.3.1 *f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche au point x_0.*

Exemple 3.3.1 *Soit*

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ \dfrac{x}{2}+1, & x>0\end{cases}$$

On a

$$l_1 = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 - x) = 1$$

Donc, f est continue à gauche, et

$$l_2 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{2} + 1 \right) = 1$$

Donc, f est continue à droite. Comme $l_1 = l_2$, f est continue en $x_0 = 0$.

d. f est dite continue sur l'intervalle I si et seulement si f est continue en tout point de I.

e. Graphiquement, une fonction est continue sur un intervalle si on peut tracer son graphe sans lever le crayon.

Proposition 3.3.1 ***(Continuité et suites)***

- *f est continue au point $x_0 \in I \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ tel que $x_n \to x_0$ lorsque $n \to +\infty$. Alors, $f(x_n) \to f(x_0)$ lorsque $n \to +\infty$.*

- *Cette propriété a été déja vue dans l'étude des suites récurrentes*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(u_n), \text{ si } f \text{ est continue et } u_n \to l \text{ lorsque } n \to +\infty \\ &\Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \text{ lorsque } n \to +\infty \end{aligned}$$

Exemples des fonctions continues

- Les fonctions constantes sur un intervalle $(f(x) = 2)$.
- La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.
- Les fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$.
- La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $f(x) = \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

Exemples des fonctions discontinues

Une fonction est discontinue en $x_0 \in I$ si

1. $\lim\limits_{x x_0} f(x) = \pm\infty$

$$f \quad : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

   On a $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Donc, f est discontinue.

2. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ mais $f(0) = 0 \neq 1$. Donc, f est discontinue.

3. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

   On a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$. Donc, f est discontinue.

4. L'une des deux limites à gauche ou à droite n'existe pas (ou les deux limites n'existent pas)

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   Il est clair que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ n'existent pas. Donc, f est discontinue.

3.3.2 Opérations sur les fonctions continues

Soient f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

i. $f + g$, λf et $f \times g$ sont continues sur I.

ii. Si $g(x) \neq 0, \forall x \in I \Rightarrow \dfrac{1}{g}$ est continue sur I.

Théorème 3.3.1 *Si $f : I \to I'$ et $g : I' \to \mathbb{R}$ $(I, I' \subset \mathbb{R})$. Si f est continue en $x_0 \in I$ et g est continue en $y = f(x_0) \in I'$. Alors*

$$g \circ f : I \to \mathbb{R} \text{ est continue en } x_0 \tag{3.3.4}$$

Exemple 3.3.2

1. *Tout polynôme*
$$\mathcal{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n, \ x \in \mathbb{R}$$
est continu car c'est la somme de fonctions continues.

2. *Si $f(x) = \dfrac{\mathcal{P}(x)}{\mathcal{Q}(x)}$ ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux polynômes tels que $\mathcal{Q}(x) \neq 0, \forall x \in I$), alors, f est continue car c'est la division de deux fonctions continues.*

3.3.3 Prolongement par continuité

Définition 3.3.1 *Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction*

- *On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie l en x_0.*
- *On définit donc la fonction $\widetilde{f} : I \to R$ par*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq x_0 \\ l, & \text{si } x = x_0 \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Alors, $\widetilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0.

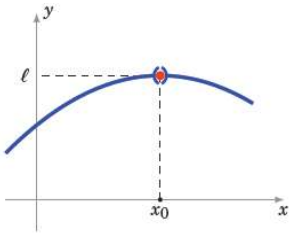


FIG.3.7. Fonction prolongeable par continuité

Exemple 3.3.3 *Voyons si la fonction définie par*

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \ \forall x \in \mathbb{R}^*$$

est prolongeable par continuité en 0. *Comme*

$$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x, \ \forall x \in \mathbb{R}^*$$

On peut déduire que $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. *Donc, cette fonction est prolongeable par continuité en* 0 *et le prolongement s'écrit*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & si \ x \neq 0 \\ 0, & si \ x = 0 \end{cases}$$

3.4 Théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues

3.4.1 Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Théorème 3.4.1 *Soit* $I = [a, b]$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Pour tout réel* k *vérifiant* $f(a) < k < f(b)$ *ou* $(f(b) < k < f(a))$, *il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f(c) = k$

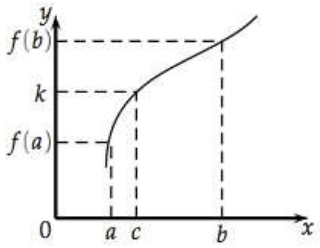


FIG.3.8. Interprétation géométrique du TVI

Conséquence. (Version plus utilisée)

Théorème 3.4.2 *Soit* $I = [a, b]$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Si* $f(a).f(b) < 0$ *(ou* 0 *est compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$*). Alors,* $\exists c \in]a, b[$ *tel que* $f(c) = 0$.

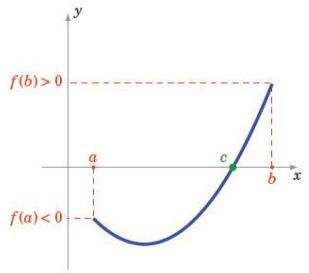


FIG.3.9. Interprétation géométrique du TVI (version plus utilisée)

Remarque 3.4.1 *Ce théorème peut être utilisé pour prouver l'existence de solutions d'une équation de la forme* $f(x) = 0$ *sans connaitre leurs valeurs.*

Exemple 3.4.1 *Montrons que l'équation* $x^7 - x^2 + 1 = 0$ *admet au moins une solution dans* $I = [-2, 0]$. *Clairement,* $f(x) = x^7 - x^2 + 1$ *est continue (polynôme). De plus,*

$$\begin{aligned} f(a) &= f(-2) = -131 < 0 \\ f(b) &= f(0) = 1 > 0 \end{aligned}$$

ou encore, $f(a) = -131 < 0 < f(b) = 1 \Rightarrow_{TVI} \exists c \in]-2, 0[$ *tel que* $f(c) = 0$.

Propriétés

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Alors, $f(I)$ est un intervalle. Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

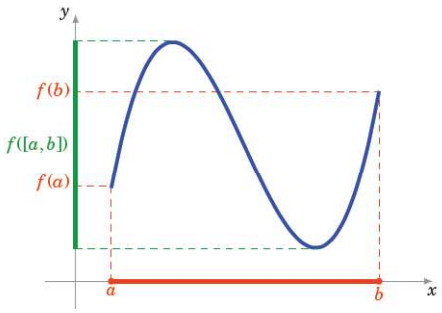


FIG.3.10. Image d'un intervalle par une fonction continue

Exemple 3.4.2 *$f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.*

2. Si $I = [a, b]$ est un intervalle fermé et borné et $f : I \to \mathbb{R}$ est continue. Alors, f est bornée sur $[a, b]$ et elle atteint ses bornes. C'est à dire

$$\begin{aligned} \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) &= \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \\ \exists x_1 \in [a,b] : f(x_1) &= \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

- *$f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $I = [1, 2]$. f est continue sur $[1, 2]$, donc elle est bornée avec*

$$\begin{aligned} \sup_{x\in I} f(x) &= \max_{x\in I} f(x) = 1 \\ \inf_{x\in I} f(x) &= \min_{x\in I} f(x) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- *$f(x) = x$ et $I = \mathbb{R}$. f n'est pas bornée car $\mathbb{R}$ ne l'est pas.*

3.4.2 Théorème de la bijection (TB)

Théorème 3.4.3 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fpnction continue et strictement monotone sur I. Alors,*

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle $f(I) = J$.*

2. *f génère une fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ qui est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variations que f.*

Remarque 3.4.2 *Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$)*

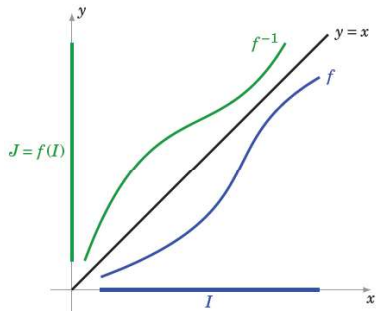


FIG.3.11. Graphes d'une fonction et sa fonction réciproque

Application

Soit la fonction

$$\begin{aligned} f \quad : \quad]-\infty, 0] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

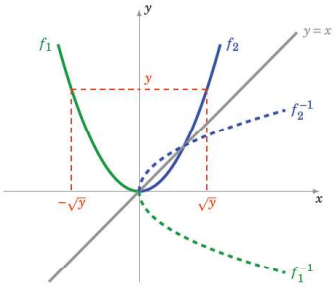
f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, d'après le théorème de bijection

$$f :]-\infty, 0] \to f\left(]-\infty, 0]\right) = [0, +\infty[$$

est bijective et

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad : \quad [0, +\infty[&\to]-\infty, 0] \\ y &\mapsto x = -\sqrt{y} \end{aligned}$$

est continue et strictement monotone (décroissante).



3.5 Etude des fonctions usuelles

3.5.1 Logarithme

Cette fonction est définie par

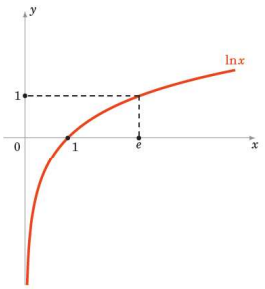
$$\begin{aligned} \ln \quad : \quad]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \ln x \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

telle que $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \forall x > 0$ et $\ln 1 = 0$.

Propriétés

$\forall a, b > 0$, on a

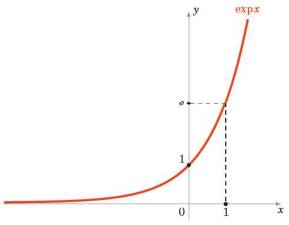
1. $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$
2. $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
3. $\ln a^n = n \ln a, \forall n \in \mathbb{N}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0, \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0, \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
6. $\ln x$ s'appelle le logarithme néperien ou le logarithme naturel avec $\ln e = 1$.



3.5.2 Exponentielle

La fonction logarithme est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, d'après le théorème de bijection, elle définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et $\exists \ln^{-1} : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ qui s'appelle la fonction exponentielle, notée

$$\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[\tag{3.5.2}$$



Cette fonction est notée aussi par $e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Propriétés

1. $\exp(\ln x) = x, \forall x > 0$ et $\ln(\exp x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $e^{a+b} = e^a.e^b$, $e^{nx} = (e^x)^n$
3. $e : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est continue et strictement croissante telle que

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

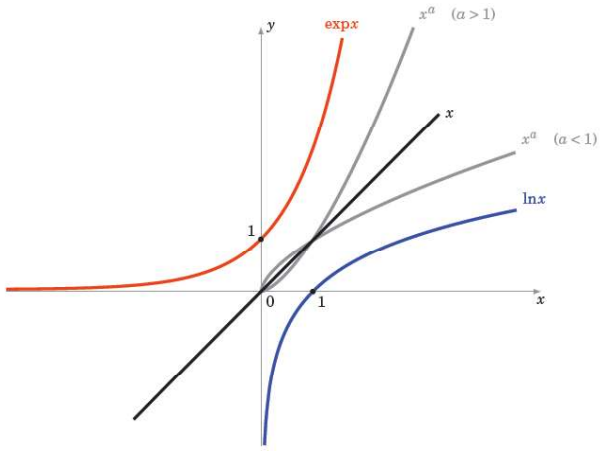
4. $(e^x)' = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ avec $e \approx 2.718$

3.5.3 Exponentielle à base a et puissance

Par définition, on a pour $x, a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} \tag{3.5.3}$$

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln a}$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln a}$ (*la racine* $n^{ième}$ *de* a)
- *La fonction* $x \mapsto a^x$ *s'appelle la fonction exponentielle à base* a *et donc* $x \mapsto e^x$ *s'appelle la fonction exponentielle à base* e *ou exponentielle classique, et il ne faut pas la confondre avec la fonction puissance* $x \mapsto x^a$.

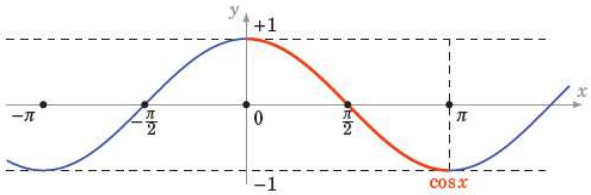


3.5.4 Fonctions circulaires (trigonométriques)

Cosinus

Cette fonction est définie par

$$\begin{aligned} \cos \quad : \quad & \mathbb{R} \to [-1,1] \\ & x \mapsto f(x) = \cos x \end{aligned} \tag{3.5.4}$$



Pour obtenir une bijection pour cette fonction, il faut considérer une restriction sur l'intervalle $[0,\pi]$, sur lequel la fonction cosinus est continue et strictement décroissante. Donc, la restriction

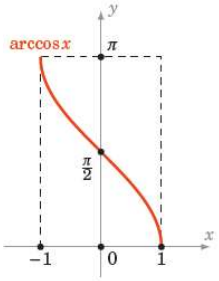
$$\cos |: [0,\pi] \to [-1,1]$$

est une bijection et sa bijection réciproque s'appelle

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi] \tag{3.5.5}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \cos(\arccos x) &= x, \forall x \in [-1,1] \\ \arccos(\cos x) &= x, \forall x \in [0,\pi] \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

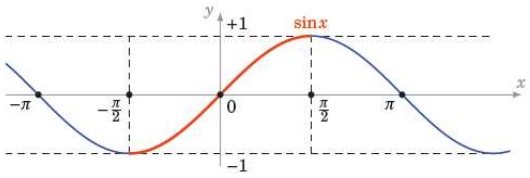


Autrement dit, si $x \in [0,\pi]$, $\cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y$, avec

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1,1[\tag{3.5.7}$$

Sinus

$$\begin{aligned} \sin \quad : \quad & \mathbb{R} \to [-1,1] \\ & x \mapsto f(x) = \sin x \end{aligned}$$

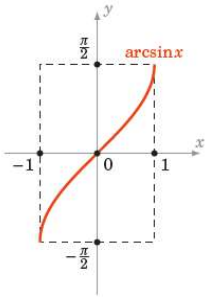


Donc, la restriction

$$\sin |: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

est une bijection (continue et strictement croissante). Sa bijection réciproque est la fonction

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \tag{3.5.8}$$



Ainsi,

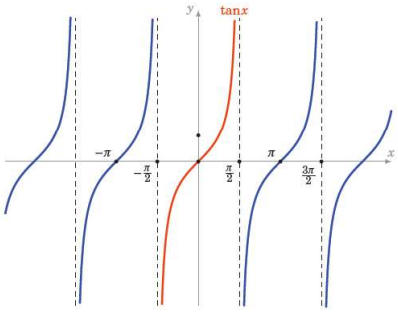
$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x) &= x, \forall x \in [-1,1] \\ \arcsin(\sin x) &= x, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

Autrement dit, si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $\sin x = y \Leftrightarrow x = \arcsin y$, et

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1,1[\tag{3.5.10}$$

Tangente

$$\begin{aligned} \tan \quad : \quad & \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R} \\ & x\mapsto f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

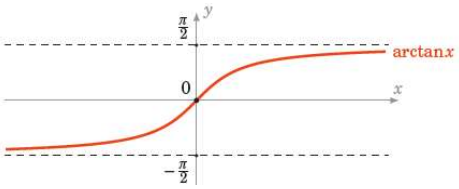


La restriction

$$\tan|:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$$

est une bijection (continue et strictement croissante), sa bijection réciproque s'appelle arctangente, notée

$$\arctan:\mathbb{R}\to\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\tag{3.5.12}$$



Ainsi,

$$\begin{aligned} \tan(\arctan x) &= x, \forall x\in\mathbb{R} \\ \arctan(\tan x) &= x, \forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

Autrement dit, si $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x=y\Leftrightarrow x=\arctan y$, avec

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \tag{3.5.14}$$

Quelques relation particulières

$\forall a, b, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \tag{3.5.16}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \tag{3.5.17}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x},\ \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \tag{3.5.18}$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a . \tan b} \tag{3.5.19}$$

$\forall x \in [-1, 1]$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \tag{3.5.20}$$

$$\arccos x + \arccos(-x) = \pi \tag{3.5.21}$$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2},\ x > 0 \\ \\ -\dfrac{\pi}{2},\ x < 0 \end{cases} \tag{3.5.22}$$

CHAPITRE 4

Dérivabilité des fonctions

4.1 Définitions et propriétés des fonctions dérivables

4.1.1 Dérivée d'une fonction en un point

Définition 4.1.1 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable au point x_0, si la limite (finie)*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe} \tag{4.1.1}$$

Cette limite qui est alors unique, est appelée dérivée de f au point x_0 et est notée $f'(x_0)$. On utilise parfois les notations suivantes

$$Df(x_0), \ \frac{df}{dx}(x_0), \ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} (\text{où } y = f(x))$$

Remarque 4.1.1 *La définition précédente permet d'écrire*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x) \ \ (\text{où } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0) \tag{4.1.2}$$

d'où l'écriture équivalente

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon(x)] \ \ (\text{où } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0) \tag{4.1.3}$$

ou encore

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \text{ existe et est finie} \tag{4.1.4}$$

Exemple 4.1.1

1. *Si f est constante, on a $f'(x) = 0, \forall x \in R$.*

2. *Si $f(x) = \sin x$, $f'(x_0)$ est la limite du rapport*

$$\begin{aligned} & \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} \\ = & \lim_{h\to 0} \frac{(\sin(x_0)\cos(h) + \cos(x_0)\sin(h)) - \sin(x_0)}{h} \\ = & \lim_{h\to 0} \left[\cos(x_0)\frac{\sin(h)}{h} + \sin(x_0)\frac{\cos(h)-1}{h}\right] \\ = & \cos(x_0)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}}_{=1} + \sin(x_0)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}}_{=0} \end{aligned}$$

   Donc, $f'(x_0) = \cos(x_0)$.

3. *Dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x_0 = 1$*

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

   Donc, $f'(1) = \frac{1}{2}$.

4. *Dérivée de $f(x)$ en $x_0 = 0$, avec*

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$$

   On a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$$

   Comme

$$0 \leq \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leq 3|x|$$

   Ce qui implique que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$. Par conséquent, $f'(0) = 0$.

5. *La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en $x_0 = 0$. En effet*

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

6. *La fonction* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$$

n'est pas dérivable en $x_0 = 0$, *car*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

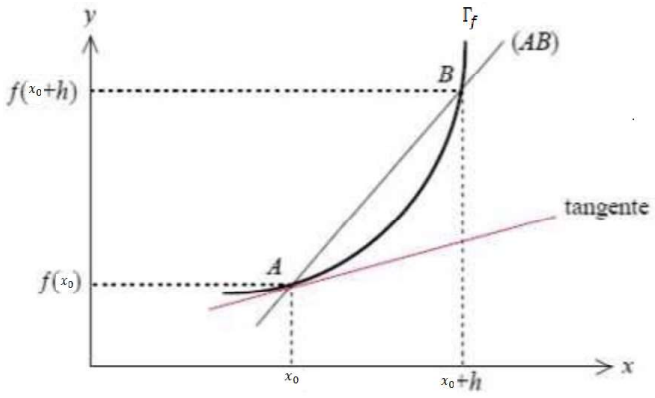
qui n'admet pas de limite lorsque $x \to 0$ ($\dfrac{1}{x} \to \infty$ *et* $\sin \dfrac{1}{x}$ *oscille entre* -1 *et* $+1$.

4.1.2 Interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction en un point

Soit Γ_f la courbe représentative d'une fonction f dérivable en x_0 et considérons le point $A(x_0, f(x_0))$ et le point $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Le coefficient directeur de la droite (AB) s'écrit

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{4.1.5}$$

Lorsque le point B s'approche du point A (lorsque h tend vers 0), le coefficient directeur de (AB) tend vers le nombre dérivé $f'(x_0)$ qui a été défini dans l'équation (4.1.4), et la droite (AB) devient la tangente à Γ_f en un seul point de contact comme il est indiqué dans la figure ci-dessous.



4.1.3 Dérivée à droite, dérivée à gauche

Définition 4.1.2 *Si le rapport* $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *admet une limite finie à droite (resp. à gauche), on dit que* f *est dérivable à droite (resp. à gauche) au point* x_0*, et on note* $f'\left(x_0^+\right)$ *(resp.* $f'\left(x_0^-\right)$*)*

$$f'\left(x_0^+\right)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4.1.6}$$

$$f'\left(x_0^-\right)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{4.1.7}$$

Remarque 4.1.2 *Pour que* f *soit dérivable en* x_0*, il faut et il suffit que la limite à droite* $f'\left(x_0^+\right)$ *soit égale à la limte à gauche* $f'\left(x_0^-\right)$*.*

Exemples de fonctions dérivables seulement à droite ou à gauche

1. $f(x)=|x|$ définie sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{-x-0}{x-0}=-1\end{aligned}$$

   Donc, f n'est donc pas dérivable au point 0.

2. $f(x)=\sqrt{x^3+x^2}$ définie sur $[-1,+\infty[$

$$\begin{aligned}\text{Si } x &\in\ ]0,+\infty[\,,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{x+1}-0}{x-0}=1\\ \text{Si } x &\in\ [-1,0[\,,\ \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sqrt{x+1}-0}{x-0}=-1\end{aligned}$$

   Donc, f n'est pas dérivable en 0.

4.2 Différentielles

Soit f une fonction dérivable en x_0. On a vu qu'on peut écrire

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\left[f'(x_0)+\varepsilon(x)\right]\ \left(\text{où }\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0\right) \tag{4.2.1}$$

Si on pose

$$x = x_0 + h \Rightarrow h = x - x_0 \tag{4.2.2}$$

la relation (4.2.1) devient

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + h\varepsilon(x) \ \ (\text{où } \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0) \tag{4.2.3}$$

Soit dx l'accroissement donné à x, alors, l'accroissement quand on passe de x à $x + dx$ est donné par

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + dx) - f(x) \tag{4.2.4}$$

Si f est dérivable au point x, alors l'accroissement Δy s'écrit en considérant la relation (4.2.3)

$$\begin{aligned} \Delta y &= \Delta f(x) = f(x + dx) - f(x) \\ &= \underbrace{f'(x)\,dx}_{df(x)} + \underbrace{dx\varepsilon(x)}_{\text{erreur commise}} \ \ (\text{où } \lim_{dx\to 0} \varepsilon(x) = 0) \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Définition 4.2.1 *Soit f une fonction dérivable au point x, l'expression $f'(x)\,dx$, qu'on note $df(x)$ ou dy s'appelle la différentielle.*

Remarque 4.2.1 *$\Delta f(x) \neq df(x)$, mais si dx est très petit, on peut approcher $\Delta f(x)$ par $df(x) = f'(x)\,dx$.*

Exemple 4.2.1 *Soit $f(x) = x^2$.*

1. *Calculer $df(x)$ et $\Delta f(x)$ pour des valeurs arbitraires de x et dx.*
2. *Calculer $df(x)$ et $\Delta f(x)$ pour $x = 20$ et $dx = 0,1$.*
3. *Calculer l'erreur commise.*

En effet.

1.

$$df(x) = f'(x)\,dx = 2xdx$$

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= f(x+dx) - f(x) = (x+dx)^2 - x^2 \\ &= x^2 + (dx)^2 + 2xdx - x^2 \\ &= 2xdx + (dx)^2\end{aligned}$$

2. *Pour* $x = 20$ *et* $dx = 0.1$

$$\begin{aligned}df(20) &= 2.20.0,1 = 4 \\ \Delta f(20) &= 2.20.0,1 + (0,1)^2 = 4,01\end{aligned}$$

3. *L'erreur commise*

$$\begin{aligned}dx\varepsilon(x) \quad | \quad _{x=20} &= \Delta f(x) \mid_{x=20} - f'(x) \mid_{x=20} dx \\ &= 4,01 - 4 = 0,01\end{aligned}$$

Ainsi, $\varepsilon = 0,1$.

Remarque 4.2.2 *Si* dx *est très petit*

$$f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)dx \tag{4.2.6}$$

Cette formule est utilisée souvent pour calculer les valeurs numériques des fonctions.

Exemple 4.2.2 *Calculons* $\sin(46°)$. *Comme* $\sin' x = \cos x$

$$\sin(x+dx) \approx \sin(x) + \cos x dx$$

Donc

$$\begin{aligned}\sin(46°) &= \sin\left(\underbrace{45°}_{x} + \underbrace{1°}_{dx}\right) \approx \sin(45°) + \cos(45°).1° \\ &= \sin(45°) + \cos(45°).\frac{\pi}{180} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{180}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{3,14}{180}\right) \approx 0,7194\end{aligned}$$

4.3 Dérivabilité et continuité

Théorème 4.3.1 *Soit f une fonction dérivable au point x_0, alors f est continue en ce point.*

Remarque 4.3.1 *La réciproque de ce théorème est fausse.*

$$f \text{ est continue en } x_0 \underbrace{\not\Rightarrow}_{toujours} f \text{ est dérivable en } x_0$$

Exemple 4.3.1

1. $f(x) = \sqrt{x}$ *est continue en* $x_0 = 0$ *car* $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0 = f(0)$, *mais*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\sqrt{x}} = +\infty$$

Donc, $f'(0)$ *n'existe pas, ce qui montre que* f *n'est pas dérivable en* $x_0 = 0$.

2. $$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Il est clair que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, *mais*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin \dfrac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x} \text{ (n'existe pas)}$$

Donc, f *n'est pas dérivable en* $x_0 = 0$.

3. $f(x) = |x|$ *est continue en* 0 *car* $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, *mais*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

Donc, f *n'est pas dérivable en* $x_0 = 0$.

4.4 Dérivée sur un intervalle et fonction dérivée

Définition 4.4.1 *Une fonction f définie sur un intervalle I est dite dérivable sur I si et seulement elle est dérivable en tout point de I. L'application*

$$\begin{aligned} f' \ : \ & I \to \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f'(x) \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

est appelée la fonction dérivée ou la dérivée de f notée f' ou $\dfrac{df}{dx}$.

4.4.1 Dérivée d'ordre supérieur

Définition 4.4.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f' admet à son tour une dérivée, celle-ci est dite la dérivée seconde de f (ou la dérivée d'ordre 2 de f) notée $f''(x) = (f'(x))', \forall x \in I$. D'une manière générale, la dérivée $n^{ième}$ de f (ou la dérivée d'ordre n de f) est la fonction*

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)', \forall x \in I \tag{4.4.2}$$

On utilise aussi les notations $D_n f$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Remarque 4.4.1 *La dérivée d'ordre 0 de f est la fonction elle même*

$$f^{(0)}(x) = f(x), \forall x \in I \tag{4.4.3}$$

Définition 4.4.3 ***(classes $\mathcal{C}^n$ d'une fonction)*** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.*

- *f est de classe $\mathcal{C}^0(I) \Longleftrightarrow$ f est continue sur I.*
- *f est de classe $\mathcal{C}^1(I) \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est dérivable sur } I \ (f' \text{ existe}) \\ f' \text{ est continue sur } I \end{cases}$*
- *...*
- *f est de classe $\mathcal{C}^n(I) \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \ (f', f'', f''', ..., f^{(n)} \text{ existent}) \\ f', f'', f''', ..., f^{(n)} \text{ sont continues sur } I \end{cases}$*

- f *est de classe* $\mathcal{C}^{\infty}(I) \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est indéfiniment dérivable sur } I \ (f', f'', f''', ... \text{ existent}) \\ f', f'', f''', ... \text{ sont continues sur } I \end{cases}$

Remarque 4.4.2 $\mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4.4.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Soient f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I.Alors, $\forall x \in I$

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f \times g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{g^2(x)}$, si $g(x) \neq 0, \forall x \in I$.
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$, si $f(x) \neq 0, \forall x \in I$.

4.4.3 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^{α}	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Remarque 4.4.3 *Si* $f(x) = x^{g(x)}$, *donc*

$$f'(x) = \left(e^{\ln x^{g(x)}}\right)' = \left(e^{g(x)\ln x}\right)' = (g(x)\ln x)' e^{g(x)\ln x} \tag{4.4.4}$$

Exemple 4.4.1 $f(x) = 2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x\ln 2}$, *donc*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{x\ln 2}\right)' = (x\ln 2)' e^{x\ln 2} \\ &= \ln 2 e^{x\ln 2} = \ln 2.2^x \end{aligned}$$

4.4.4 Dérivée d'une fonction composée

Proposition 4.4.1 *Si* g *est une fonction dérivable en* x *et* f *est une fonction dérivable en* $g(x)$, *alors,* $f \circ g$ *est dérivable en* x *et sa dérivée est donnée par*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x) \tag{4.4.5}$$

Exemple 4.4.2 *Calculons* $(\ln(1+x^2))'$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f'(g(x)) = \frac{1}{1+x^2} \\ g(x) &= 1+x^2 \Longrightarrow g'(x) = 2x \end{aligned}$$

Donc,

$$\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)' = (f\circ g)'(x) = \frac{1}{1+x^2} \times 2x = \frac{2x}{1+x^2}$$

4.4.5 Dérivée d'une fonction réciproque

Proposition 4.4.2 *Soit* $f : I \to J$ *une fonction dérivable et bijective, alors,* $f^{-1} : J \to I$ *est sa bijection réciproque. Si* f' *ne s'annule pas sur* I, *alors* f^{-1} *est dérivable et on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}, \forall y \in J \tag{4.4.6}$$

Exemple 4.4.3 *Soit*

$$\begin{aligned} f &: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \\ &\quad x \mapsto f(x) = \sin x \end{aligned}$$

f est continue et strictement monotone, elle est donc bijective d'après le théorème de la bijection, il existe donc sa bijection réciproque qui s'écrit

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad : \quad & [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & y \mapsto f^{-1}(y) = \arcsin y \end{aligned}$$

Donc

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{\cos\left(\arcsin y\right)}$$

Comme $\cos^2(\arcsin y) = 1 - \sin^2(\arcsin y) = 1 - y^2$, *donc*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \ y \in [-1,1]$$

4.4.6 Dérivée $n^{ième}$ d'un produit (formule de Leibniz)

Théorème 4.4.1 *Soient f et g deux fonctions dérivables*

$$\begin{aligned} (f.g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} \\ &= C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + ... + C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} + ... + C_n^n f g^{(n)} \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

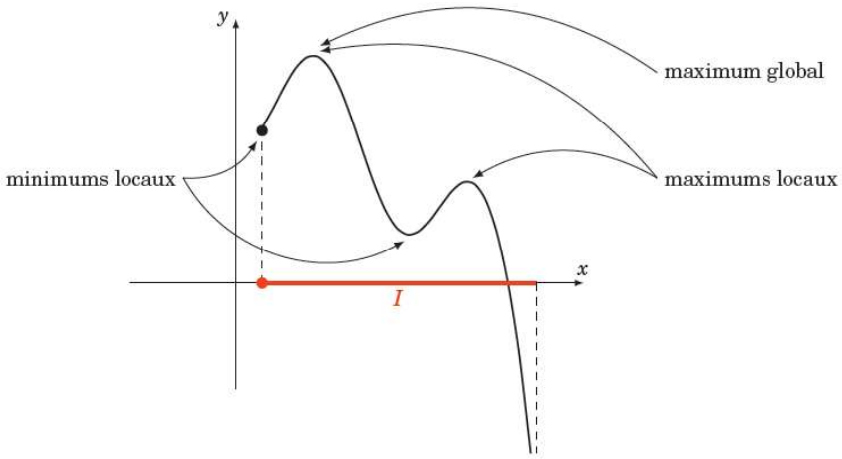
Exemple 4.4.4

- *Pour $n = 1$, $(f.g)' = f'g + fg'$.*
- *Pour $n = 2$, $(f.g)'' = C_2^0 f''g + C_2^1 f'g' + C_2^2 fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$.*

4.5 Extremums

Définition 4.5.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*

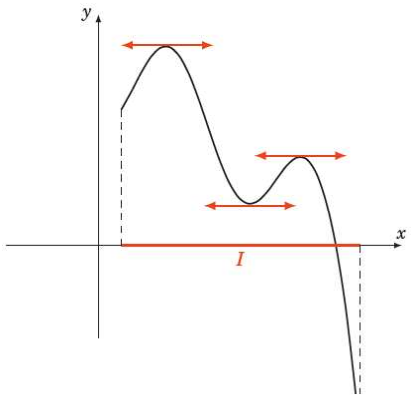
- *On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.*
- *On dit que f admet un maximum local (resp. un minimum local) s'il existe un intervalle J dans lequel $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in I \cap J$ (resp. $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in I \cap J$).*



- *Par conséquent, f admet un maximum (resp. un minimum) globale en x_0 si $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$), $\forall x \in I$.*
- *On dit que f admet un extremum local (resp. globale) en x_0 si elle admet un minimum local (resp. globale) ou un maximum local (resp. globale) en ce point.*

Remarque 4.5.1

1. *Un extremum globale est aussi local, l'inverse est faux.*
2. *La tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est horizontale au graphe de f.*



4.5.1 Calcul pratique des extremums locaux

1. Recherche des points critiques qui vérifient $f'(x_0) = 0$.

2. Etude du signe de f' par rapport aux points critiques trouvés.

3. Utilisation du tableau1 ou tableau2 ci-dessous pour conclure.

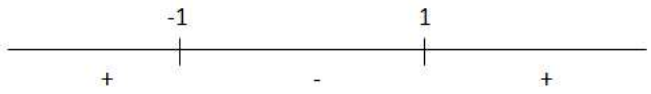
x_0^-	$f'(x_0)$	x_0^+	Nature du point critique
+	0	-	Maximum local
-	0	+	Minimum local
+	0	+	Ni max ni min et $f \nearrow$
-	0	-	Ni max ni min et $f \searrow$

Tableau1

$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	Nature du point critique
0	+	Minimum local
0	-	Maximum local
0	0	Ni max ni min

Tableau2

Exemple 4.5.1 *Déterminer les extremums locaux de la fonction* $f(x) = x^3 - 3x + 3$, *donc,* $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ *(2 points critiques)*



D'après le tableau1, il est clair que f admet un maximum local en $x_0 = -1$ *et un minimum local au point* $x_0 = 1$. *Si on veut utiliser le tableau2, on calcule* $f''(x) = 6x$.

$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{ } f \text{ admet un maximum local en } x_0 = -1$$
$$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{ } f \text{ admet un minimum local en } x_0 = 1$$

Remarque 4.5.2 *La réciproque de ce résultat est fausse. En effet, soit*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) = x^3 \end{aligned}$$

On a $f'(x) = 3x^2 > 0 \Leftrightarrow f$ *n'admet ni minimum ni maximum.*

4.6 Théorème de Rolle et accroissements finis

4.6.1 Théorème de Rolle (TR)

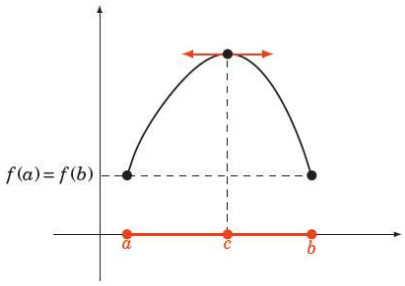
Théorème 4.6.1 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *telle que*

1. f *est continue sur* $[a, b]$.
2. f *est dérivable sur* $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Alors, il existe un point critique c *de* f

$$\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0 \tag{4.6.1}$$

Géométriquement



Il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

Exemple 4.6.1 *Montrer que la dérivée de la fonction* $f(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$ *s'annule au moins une fois sur* $]0, 1[$. *Il est clair que* f *est continue (polynôme) et dérivable sur* $[0, 1]$, *de plus*

$$f(0) = 2 = f(1) = 3 - 11 + 12 - 4 + 2$$

D'après TR,

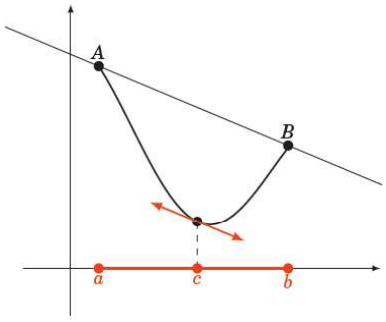
$$\exists c \in]0, 1[: f'(c) = 0$$

4.6.2 Théorème des accroissements finis (TAF)

Théorème 4.6.2 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors,*

$$\exists c \in]a,b[: f(b) - f(a) = (b-a) f'(c) \tag{4.6.2}$$

Géométriquement



Il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite AB, avec $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

4.7 Règle de l'Hopital

Théorème 4.7.1 *Soient f et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $]a,b[$ telles que g ne s'annule pas sur $]a,b[$.*

1. *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = 0$ *(Forme indéterminée* $\frac{0}{0}$*), alors*

$$Si \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{4.7.1}$$

2. *Si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = \infty$ *(Forme indéterminée* $\frac{\infty}{\infty}$*), alors*

$$Si \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \tag{4.7.2}$$

Exemple 4.7.1 *En utilisant la règle de l'Hopital, calculer les limites*

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(x^2+x-1\right)}{\ln x} = \dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{2x+1}{x^2+x-1}}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\left(2x+1\right)}{x^2+x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x}{x^2+x-1}.$

   Donc

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(x^2+x-1\right)}{\ln x} = 3$$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x} = \dfrac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{3}{\cos^2 3x}} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x} = \dfrac{0}{0}$

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{-2\cos 3x.3\sin 3x}{-6\cos x.\sin x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x.\sin 3x}{\cos x.\sin x} = \underbrace{\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}}_{FI}.\underbrace{\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}}_{=-1}$$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{-3\sin 3x}{-\sin x} = -3$. *Par conséquent*

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x} = (-3).(-1) = 3$$

CHAPITRE 5

Développements limités

5.1 Formules de Taylor

5.1.1 Formule de Taylor avec reste de Lagrange au voisinage d'un point $a \neq 0$

Théorème 5.1.1 *Soit $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ $(a, x \in \mathbb{R})$ une fonction $n-fois$ dérivable sur $[a, x]$ avec*

- *$f^{(n)}$ est continue sur $[a, x]$.*
- *$f^{(n)}$ est dérivable dans $]a, x[$ $\left(f^{(n+1)} \text{ existe dans }]a, x[\right)$.*

Alors, il existe $c \in]a, x[$ tel que

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)}_{\mathcal{P}_n(x)\text{:Partie polynômiale}} + \underbrace{\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}_{\mathcal{R}_n(x)\text{:Reste de Lagrange}} \tag{5.1.1}$$

avec

$$\mathcal{R}_n(x) \to 0, \text{ lorsque } x \to a \tag{5.1.2}$$

Exemple 5.1.1 *Soient $a, x \in \mathbb{R}$, $\forall n \geq 0$, $\exists c \in]a, x[$ tel que*

$$e^x = e^a + (x-a)e^a + \frac{(x-a)^2}{2}e^a + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}e^a + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

Remarque 5.1.1 *Dans la plupart des cas, on ne connaît pas la valeur de c, mais on peut encadrer le reste d'après le résultat suivant*

Corollaire 5.1.1 *Si de plus on a*

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq M, \ \forall c \in]a, x[\tag{5.1.3}$$

Alors,

$$|f(x) - \mathcal{P}_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{5.1.4}$$

Remarque 5.1.2 *Pour $n = 0$, la formule de Taylor est exactement l'énoncé du théorème des accroissements finis*

$$\begin{aligned} \exists c &\in]a, x[\quad (b = x) \\ f(b) &= f(a) + (b-a) f'(c) \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

5.1.2 Formule de Taylor avec reste de Lagrange au voisinage de $a = 0$ (ou Formule de Taylor-MacLaurin avec reste de Lagrange)

C'est la formule de Taylor au voisinage de $a = 0$. Ainsi, cette formule s'écrit

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c), \ c \in]0, x[\tag{5.1.6}$$

Exemple 5.1.2 *A l'aide de la formule Taylor-MacLaurin à l'ordre 4, trouver une approximation de* $\sin(0.01)$.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}f^{(4)}(c), \ c \in]0, x[$$

$f(x) = \sin x, \ x = 0.01, \ f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1.$

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0.$

$f^{(3)}(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1.$

$f^{(4)}(x) = \sin x \Longrightarrow f^{(4)}(c) = \sin c.$

Donc,

$$f(x) = \sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6}}_{\mathcal{P}_3(x)} + \underbrace{\frac{x^4}{4!}\sin c}_{\mathcal{R}_3(x)}$$

Ce qui donne pour $x = 0.01$

$$\sin(0.01) \approx 0.01 - \frac{(0.01)^3}{6} = 0.00999983333...$$

5.1.3 Formule de Taylor-Young au voisinage d'un point $a \neq 0$

Théorème 5.1.2 *Soit* $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ $(a, x \in \mathbb{R})$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^n$, *alors cette formule s'écrit*

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{\mathcal{R}_n(x)} \quad (5.1.7)$$

avec

$$\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \quad (5.1.8)$$

Remarque 5.1.3 *Le reste* $\mathcal{R}_n(x)$ *est souvent négligeable*

$$\frac{\mathcal{R}_n(x)}{(x-a)^n} = \varepsilon(x) \to 0, \text{ lorsque } x \to a \quad (5.1.9)$$

et il est noté $o((x-a)^n)$.

5.1.4 Formule de Taylor-Young au voisinage de $a = 0$ (ou Formule de MacLaurin-Young)

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x) \quad (5.1.10)$$

avec

$$\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \quad (5.1.11)$$

ou bien

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o(x^n) \quad (5.1.12)$$

Exemple 5.1.3 *Soit*

$$f \quad : \quad]1,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \ln(1+x)$$

On sait que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $]1,+\infty[$ et $f(0)=0$. Ecrivons la formule de MacLaurin-Young.

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1.$
$f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1.$
$f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2.$
.....

Par récurrence

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

Donc

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)! + o(x^n)$$

5.2 Développements limités

5.2.1 Développement limité d'une fonction au voisinage d'un point $a \neq 0$

Définition 5.2.1 ***(Existence).*** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité (DL) au voisinage du point a à l'ordre n si, $\exists c_0, c_1, ..., c_n$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to a$ de sorte que*

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n}_{Partie\ polynômiale\ du\ DL} + \underbrace{o\left((x-a)^n\right)}_{Reste\ du\ DL} \tag{5.2.1}$$

Proposition 5.2.1 *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au point a, alors f admet un DL au voisinage de a à l'ordre n qui n'est autre que la formule de Taylor-Young.*

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o\left((x-a)^n\right) \tag{5.2.2}$$

Proposition 5.2.2 ***(Unicité).*** *Si f admet un DL, alors, ce DL est unique.*

Remarque 5.2.1 *Pour écrire un DL d'une fonction au voisinage d'un point $a \neq 0$, on peut ramener le DL au point 0 en faisant le changement de variable*

$$h = x - a$$

et donc, lorsque x est proche de a, h est proche de 0.

Exemple 5.2.1

1. *DL de $f(x) = e^x$ en $a = 1$* à l'ordre 2. *On pose $h = x - 1$, on se ramène donc à un DL de e^h au voisinage de $h = 0$.*

$$\begin{aligned} e^x = e^{h+1} = e.e^h = e.(1 + h + \frac{h^2}{2!} + o(h^2)) \\ = e.(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + o\left((x-1)^2\right)) \end{aligned}$$

2. *DL de $f(x) = \sin x$ en $a = \frac{\pi}{2}$* à l'ordre 4. *On pose $h = x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = h + \frac{\pi}{2}$.*

$$\sin x = \sin(h + \frac{\pi}{2}) = \sin(h)\cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2})\cos(h) = \cos(h)$$

$$= 1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} + o(h^4)$$

$$= 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right)$$

3. *DL de $f(x) = \ln(1 + 3x)$ en $a = 1$ à l'ordre 3. On pose $h = x - 1 \Rightarrow x = h + 1$.*

$$\begin{aligned} \ln(1 + 3x) = \ln(1 + 3(h+1)) = \ln(1 + 3h + 3) \\ = \ln(4 + 3h) = \ln(4(1 + \frac{3h}{4})) = \ln 4 + \ln(1 + \frac{3h}{4}) \end{aligned}$$

$$= \ln 4 + \frac{3h}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{3h}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3h}{4}\right)^3 + o\left(\frac{3h}{4}\right)^3$$

$$= \ln 4 + \frac{3(x-1)}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{3(x-1)}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3(x-1)}{4}\right)^3 + o\left(\frac{3(x-1)}{4}\right)^3$$

5.2.2 Développement limité d'une fonction au voisinage de $a = 0$

Ce DL s'écrit

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + o((x)^n) \tag{5.2.3}$$

qui n'est autre que la formule de Taylor-Young en $a = 0$, appelée aussi formule de MacLaurin-Young.

Corollaire 5.2.1 *Si f est une fonction paire (resp. impaire),alors la partie polynômiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).*

Exemple 5.2.2 *$f(x) = \cos x$ est paire*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

Développement limité des fonctions usuelles en 0 (à apprendre par coeur!)

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \alpha \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + ... + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5...(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)}$$

5.2.3 Opérations sur les DL

Somme et produit de deux DL

Supposons que f et g sont deux fonctions qui admettent des DL en 0 à l'ordre n

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + o(x^n) \\ g(x) &= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + ... + d_n x^n + o(x^n) \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Proposition 5.2.3

- *$f+g$ admet un DL en 0 à l'ordre n qui est*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (c_0+d_0) + (c_1+d_1)x + ... + (c_n+d_n)x^n + o(x^n) \tag{5.2.5}$$

- *$f \times g$ admet un DL en 0 à l'ordre n qui est*

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = T_n(x) + o(x^n) \tag{5.2.6}$$

où $T_n(x)$ est le polynôme tronqué à l'ordre n, cela signifie que l'on conserve seulement les monômes de degré $\leq n$.

$$T_n(x) = \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n\right)\left(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + ... + d_n x^n\right) + o(x^n) \tag{5.2.7}$$

Exemple 5.2.3

1. *DL de $\sin x + \cos x$ en 0 à l'ordre 3.*

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\sin x + \cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$$

2. *DL de* $\cos x \times \sqrt{1+x}$ *en* 0 *à l'ordre* 2.

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right) \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \cos x \times \sqrt{1+x} &= \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) + o\left(x^2\right) \\ &= \underbrace{1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^2}{2}}_{\text{On conserve seulement les monômes de degré} \leq 2} \boxed{-\frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{16}} + o\left(x^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\cos x \times \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + o\left(x^2\right)$$

Multiplication par un scalaire

Soit le DL en 0 à l'ordre n de la fonction f

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + o\left(x^n\right) \tag{5.2.8}$$

Proposition 5.2.4 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf *admet un DL en* 0 *à l'ordre* n *qui est*

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n\right) + o\left(x^n\right) \tag{5.2.9}$$

Exemple 5.2.4 *DL de* $2\cos x$ *en* 0 *à l'ordre* 2 *s'écrit*

$$\begin{aligned} 2\cos x &= 2\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + o\left(x^2\right) \\ &= 2 - x^2 + o\left(x^2\right) \end{aligned}$$

Composition

Etant donné les DL en 0 à l'ordre n des fonctions f et g

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n + o\left(x^n\right) \\ g(x) &= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + ... + d_n x^n + o\left(x^n\right) \end{aligned}$$

Proposition 5.2.5 *Si $g(0) = d_0 = 0$, alors la fonction $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n dont la partie polynômiale est tronquée à l'ordre n.*

Exemple 5.2.5 *Pour écrire le DL de $\sin(\ln(1+x))$ en 0 à l'ordre 3, il est clair que $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \ln(1+x)$ et $g(0) = 0$. Donc, le DL en 0 à l'ordre 3 de la fonction $f \circ g$ existe.*

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sin(\ln(1+x)) &= \ln(1+x) - \frac{(\ln(1+x))^3}{3!} + o\left(x^3\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned} (\ln(1+x))^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)^2 + o\left(x^3\right) \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o\left(x^3\right) \\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) = x^2 - x^3 + o\left(x^3\right) \\ (\ln(1+x))^3 &= (\ln(1+x))^2 . \ln(1+x) = \left(x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{2}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) + o\left(x^3\right) \\ &= x^3 + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Division

Soient les DL en 0 à l'ordre n des fonctions f et g

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n}_{C_n(x)} + o\left(x^n\right) \\ g(x) &= \underbrace{d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + ... + d_n x^n}_{D_n(x)} + o\left(x^n\right) \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Alors, on écrit la division suivant les puissances croissantes de C_n par D_n à l'ordre n

$$\frac{C_n(x)}{D_n(x)} = G_n(x) + o(x^n) \tag{5.2.11}$$

où $G_n(x)$ est le polynôme tronqué à l'ordre n.

Exemple 5.2.6 *DL de* $\dfrac{2+x+2x^2}{1+x^2}$ *en* 0 *à l'ordre* 2.

$$\begin{array}{l|l} 2+x+2x^2 & 1+x^2 \\ \underline{-(2+2x^2)} & \\ x & 2+x \\ \underline{-(x+x^3)} & \\ -x^3 & \end{array}$$

Donc

$$\frac{2+x+2x^2}{1+x^2} = 2 + x + o\left(x^2\right)$$

5.2.4 Applications des DL

Calcul des limites

On peut calculer les limites ayant des formes indéterminées à l'aide des DL.

Exemple 5.2.7

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^4} = \frac{0}{0}$$

On a

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right) \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right) \\ \frac{1}{2}\sin^2 x &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + o\left(x^4\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \boxed{\frac{x^6}{36}} - \frac{2x^4}{6}\right) + o\left(x^4\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\tan x+\frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^4}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{6}}{3x^4}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{6}}{3x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5x^4}{12}}{3x^4}=-\frac{5}{36}
\end{aligned}$$

Remarque 5.2.2 *D'une façon générale, on calcule les DL à l'ordre le plus bas possible, sinon, on augmente progressivement l'ordre.*

Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 5.2.6 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL au point a*

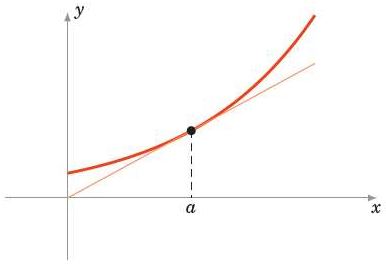
$$f(x)=\underbrace{c_0+c_1(x-a)}_{y}+c_k(x-a)^k+o\left((x-a)^k\right) \tag{5.2.12}$$

où k est le plus petit entier ≥ 2 tel que $c_k \neq 0$. Alors, l'équation de la tangente à la courbe de f au point a est

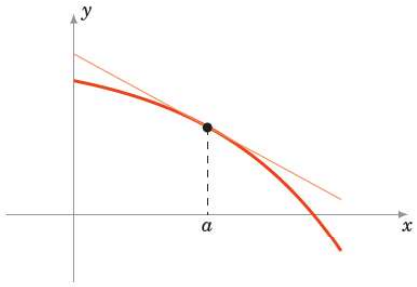
$$y=c_0+c_1(x-a) \tag{5.2.13}$$

et la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de a (autour de a) est donnée par le signe de $f(x)-y$ (et donc le signe de $c_k(x-a)^k$). On peut rencontrer trois cas possibles

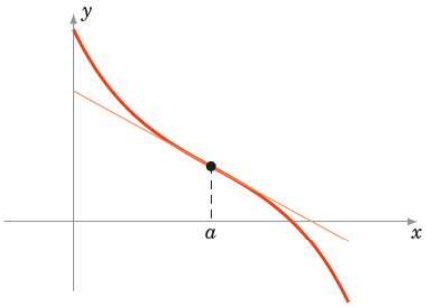
- *Si le signe de $c_k(x-a)^k$ est positif, la courbe est au-dessus de la tangente*



- *Si le signe de* $c_k (x-a)^k$ *est négatif, la courbe est au-dessous de la tangente*



- *Si le signe change (lorsqu'on passe de* $x < a$ *à* $x > a$*), alors, la courbe traverse la tangente au point d'abscisse* a *qui est un point d'inflexion*



Exemple 5.2.8

1. *Préciser la position de la courbe par rapport à la tangente au point* $a = \dfrac{1}{2}$ *de la fonction* $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.

2. *Déterminer les points d'inflexion (si elles existent).*

En effet,

1. *Le DL de* f *au point* $a = \dfrac{1}{2}$ *s'écrit*

$$f(x) = \underbrace{f\left(\frac{1}{2}\right)}_{c_0} + \left(x - \frac{1}{2}\right)\underbrace{f'\left(\frac{1}{2}\right)}_{c_1} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \underbrace{\frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{2!}}_{c_2} + o\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

On a $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ *et* $f''(x) = 12x^2 - 12x \Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12}{4} - \frac{12}{2} = -3 \neq 0$, *donc* $k = 2$ *et l'équation de la tangente est*

$$y = \frac{13}{16} - \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Donc,

$$f(x) - y = -3\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{2}$$

Ainsi, le graphe est au-dessous de la tangente autour de $\frac{1}{2}$.

2. *Recherche des points d'inflexion*

Les points d'inflexion sont à chercher parmi les solutions de $f''(x) = 0$, donc

$$12x^2 = 12x \Leftrightarrow x^x = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

- *DL en* 0 *de* $f(x)$ *est*

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{c_0=1} + x\underbrace{f'(0)}_{c_1=0} + x^2\underbrace{\frac{f''(0)}{2}}_{c_2=0} + x^3\underbrace{\frac{f'''(0)}{3!}}_{c_3=-12} + o\left(x^3\right)$$

Donc $k = 3$ *et*

$$f(x) = 1 - 12.\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

L'équation de la tangente en 0 *s'écrit donc*

$$y = 1$$

Donc,

$$f(x) - y = -2x^3$$

qui change de signe autour de 0. *Par suite,* 0 *est un point d'inflexion.*

- *DL en* 1 *de* $f(x)$ *est*

$$f(x) = \underbrace{f(1)}_{c_0=0} + (x-1)\underbrace{f'(1)}_{c_1=-2} + (x-1)^2\underbrace{\frac{f''(1)}{2}}_{c_2=0} + (x-1)^3\underbrace{\frac{f'''(1)}{3!}}_{c_3=12} + o\left((x-1)^3\right)$$

Donc $k = 3$ *et*

$$f(x) = -2(x-1) + 2(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right)$$

et l'équation de la tangente en 1 *est*

$$y = -2(x-1)$$

Donc,

$$f(x) - y = 2(x-1)^3$$

qui change de signe autour de 1*. Par suite,* 1 *est un point d'inflexion.*

CHAPITRE 6

Intégrales

6.1 Construction d'une intégrale définie

6.1.1 Définition d'une subdivision

Une subdivision d'un intervalle fermé et borné $[a, b]$ est une suite de nombres $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$ vérifiant

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \tag{6.1.1}$$

6.1.2 Intégrale de Riemann

L'introduction d'une intégrale a été motivée par le désir du calcul de l'aire limitée par la courbe d'une fonction $f(x)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $(x = a)$ et $(x = b)$.

L'idée est de découper l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles à l'aide d'une subdivision $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$, puis de sommer les aires des rectangles basés sur les sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]_{i=\overline{1,n}}$, d'hauteur $f(\xi_i)$ $(\xi_i \in [x_{i-1}, x_i])$ et de largeur $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1, n}$, où n désigne le nombre de sous-intervalles.

Cette somme des aires est appelée "somme de Riemann associée à la fonction f sur $[a,b]$", et elle s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(f) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).h_i \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

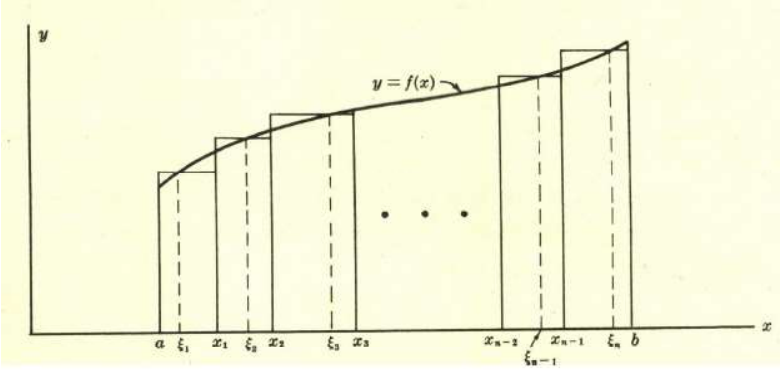


FIG.5.1. Interprétation géométrique de la somme de Riemann

Remarque 6.1.1 *Plus on augmente le nombre de sous-intervalles, plus l'approximation de l'aire cherchée est bonne. Un meilleur choix est de subdiviser l'intervalle $[a,b]$ en sous-intervalles égaux, ce qui donne*

$$\begin{cases} x_i = a + i \underbrace{\dfrac{b-a}{n}}_{h:pas\ constant}, \ i = \overline{0,n} \\ \xi_i \text{ le milieu de } [x_{i-1}, x_i], \ i = \overline{1,n} \end{cases} \tag{6.1.3}$$

La somme de Riemann sera donc

$$\mathcal{S}_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \tag{6.1.4}$$

Définition 6.1.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, si la somme $\mathcal{S}_n(f)$ a une limite quand $n \to +\infty$. Lorsque cette limite existe, elle s'appelle l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$, et on écrit*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{S}_n(f) \tag{6.1.5}$$

6.1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Une autre construction de l'intégrale d'une fonction a été introduite en utilisant les fonctions en escalier.

Définition 6.1.2 *Une fonction f est dite fonction en escalier si elle est constante sur chacun des sous-intervalles d'une subdivision $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$ de $[a, b]$ (où $f : [a, b] \to \mathbb{R}$). Autrement dit, s'il existe des nombres réels $c_1, c_2, ..., c_n$ tels que, $\forall i = \overline{1, n}$*

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \ \ f(x) = c_i \tag{6.1.6}$$

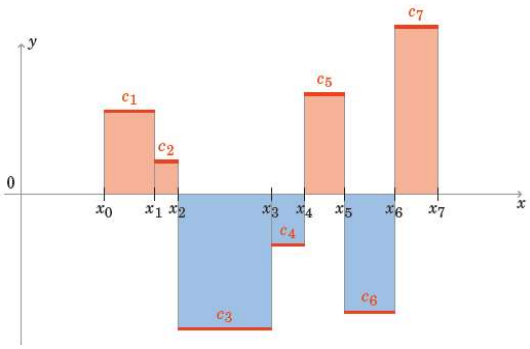


FIG.5.2. Fonction en escalier

Définition 6.1.3 *Pour une fonction en escalier f, son intégrale est donnée par*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}) \tag{6.1.7}$$

où chaque terme $c_i (a_i - a_{i-1})$ est l'aire du rectangle compris entre les abscisses x_{i-1} et x_i et de hauteur c_i.

6.1.4 Fonctions intégrables

Définition 6.1.4 *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite continue pa morceaux s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une subdivision $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$ telle que $f|_{]x_{i-1},x_i[}$soit continue.*

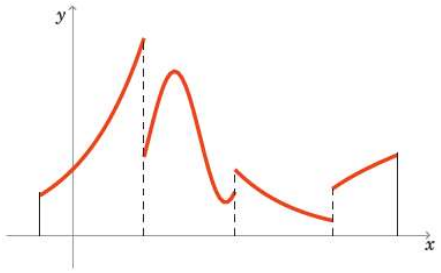


FIG.5.3. Fonction continue par morceaux

Théorème 6.1.1 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue (resp. continue par morceaux), alors, f est intégrable.*

6.2 Propriétés de l'intégrale définie

- **Relation de Chasles :** Soient $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$, alors, elle l'est sur $[a,b]$, et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{6.2.1}$$

  On peut donc déduire que

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \text{ et } \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{6.2.2}$$

- **Positivité :** Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$

$$\text{si } f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \tag{6.2.3}$$

  En particulier,

$$\text{si } f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \tag{6.2.4}$$

- **Linéarité :** Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Alors,

a. $f+g$ est intégrable et

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{6.2.5}$$

b. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf est intégrable et on a

$$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx \tag{6.2.6}$$

c. $f \times g$ est intégrable, mais en général

$$\int_a^b (f \times g)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \tag{6.2.7}$$

Exemple 6.2.1 *(Le calcul sera détaillé par la suite)*

$$\int_0^1 \left(2x^2 - x\right)dx = 2\int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx = 2\,\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

6.3 Primitive d'une fonction sur un intervalle

Trouver une primitive d'une fonction est l'opération inverse de calculer sa dérivée

Définition 6.3.1

1. *Soit $f : I \to R$. On dit que $F : I \to R$ est une primitive de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant*

$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in I \tag{6.3.1}$$

et on écrit

$$\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{Intégrale indéfinie}} = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R} \tag{6.3.2}$$

et donc, si F est une primitive, alors f admet une infinité de primitives.

2. *Si $f : I \to R$ est une fonction continue sur I et F une primitive quelconque de f sur I, $a, b \in I$. Alors,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)]_a^b = F(b) = F(a) \tag{6.3.3}$$

Propriétés

- Soient F une primitive de f et G une primitive de g, alors, $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors, λF est une primitive de λf.

6.3.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Primitive
a (constante)	ax
x^α $(\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
e^x	e^x
$sinx$	$-cosx$
$cosx$	$sinx$
$1 + tan^2x = \frac{1}{cos^2x}$	$tanx$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctanx$
$\frac{1}{x}$	$ln\|x\|$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsinx$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arccosx$

Fonction composée	Primitive
$u'u^n\ (n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$ln\lvert u\rvert$
$u'e^u$	e^u
$sinu$	$\frac{-1}{u'}cosu$
$cosu$	$\frac{1}{u'}sinu$

6.4 Méthodes d'intégration

6.4.1 Méthode de changement de variable

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. En effectuant le changement de variable $x = u(t)$, donc $dx = u'(t)\,dt$, ce qui donne

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(u(t)).u'(t)\,dt \tag{6.4.1}$$

Exemple 6.4.1

1. $I = \int_1^5 \sqrt{2x-1}dx$. *Posons* $u = \sqrt{2x-1} \Rightarrow du = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}dx = \frac{1}{u}dx \Rightarrow dx = udu$. *De plus, si* $x = 1 \Rightarrow u = 1$ *et si* $x = 5 \Rightarrow u = 3$. *Ainsi,*

$$I = \int_1^3 u^2 du = \frac{u^3}{3}\Big]_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

2. $I = \int \frac{1}{x \ln x}dx$. *Posons* $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$. *Donc,*

$$I = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + c$$

Puis, on doit revenir à la variable initiale x, ce qui donne

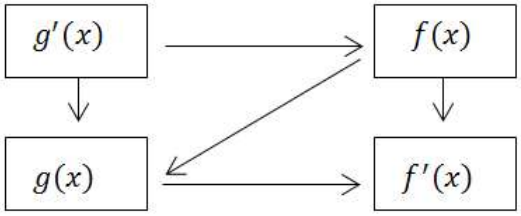
$$I = \ln|\ln x| + c$$

6.4.2 Intégration par parties

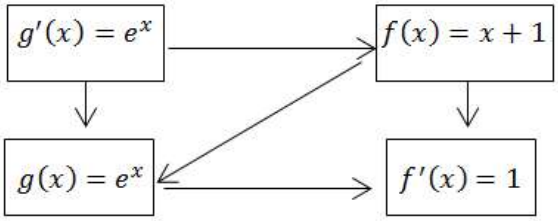
Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = f.g]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx \tag{6.4.2}$$

Technique. La fonction la plus simple sera $f(x)$ (à dériver) et l'autre sera $g'(x)$ (à intégrer). On obtient donc un schéma en forme de la lettre Z.



Exemple 6.4.2 *Calculons* $I = \int_0^1 (x+1)\,e^x dx$.



Donc,

$$\begin{aligned} I &= e^x(x+1)]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e(1+1) - e^0(0+1) - e^x]_0^1 \\ &= 2e - 1 - (e-1) = e. \end{aligned}$$

Remarque 6.4.1

1. *En général, cette méthode est utilisée dans les situations suivantes*

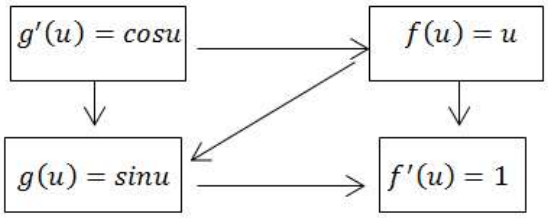
$$\int \mathcal{P}_n(x).\tan x dx,\ \int \mathcal{P}_n(x).\sin x dx,\ \int \mathcal{P}_n(x).\cos x dx,\ \int \mathcal{P}_n(x).\arcsin x dx$$
$$\int \mathcal{P}_n(x).\arccos x dx,\ \int \mathcal{P}_n(x).\arctan x dx,\ \int \mathcal{P}_n(x).\ln x dx \text{ et } \int \mathcal{P}_n(x).e^x dx$$

où $\mathcal{P}_n(x)$ est un polynôme de degré ≥ 0.

2. *On peut rencontrer une fonction $f(x)$ au lieu de la variable x dans les cas cités ci-dessus, on procède donc par un changement de variable $u = f(x)$, puis, on effectue une intégration par parties. En effet, si $I = \int \cos\sqrt{x}dx$,* on pose

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2u}dx \Rightarrow dx = 2udu$$

Donc, $I = 2\int u.\cos u du$, on intègre maintenant par parties



Donc, $I = 2(u.\sin u - \int \sin u du) = 2(u.\sin u + \cos u) + c$. En revenant à x, on trouve

$$I = 2\sqrt{x}.\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + c$$

6.4.3 Intégration des fractions rationnelles

On va traiter les intégrales du type $I = \int \frac{\mathcal{P}(x)}{\mathcal{Q}(x)}dx$, où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux polynômes, avec degré $\mathcal{Q} \geq 2$ et degré $\mathcal{P} \geq 0$. On peut rencontrer les situations suivantes

1. **Premier cas.** Si $\mathcal{Q}(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ($\Delta_{\mathcal{Q}(x)} < 0$), on observe le numérateur $\mathcal{P}(x)$.

a. Si $\mathcal{P}(x)$ est un polynôme de degré ≥ 1, on essaye de faire apparaître une fonction du type $\frac{u'}{u} \Leftrightarrow \int \frac{u'}{u}du = \ln|u| + c$.

b. Si $\mathcal{P}(x) = 1$, on essaye de faire apparaître une fonction de la forme

$$\frac{1}{1+u^2} \Leftrightarrow \int \frac{1}{1+u^2} du = \arctan u + c.$$

Exemple 6.4.3 $I = \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx$, $\mathcal{Q}(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *et degré* $\mathcal{P}(x) = 1$, *donc*

$\mathcal{Q}'(x) = 2x+1$ *et* $\mathcal{P}(x) = x+1 = \frac{2}{2}(x+1) = \frac{1}{2}(2x+2) = \frac{1}{2}(\underline{2x} + 2 + \underline{1} - 1) = \frac{1}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{x^2+x+1} dx}_{J} \end{aligned}$$

Calculons maintenant l'intégrale $J : \mathcal{P}(x) = 1 \Rightarrow \mathcal{Q}(x) = x^2+x+1 = x^2+bx+c$.
Comme $b = 1 \Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathcal{Q}(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \alpha = \underbrace{x^2+x+\frac{1}{4}}_{} + \underbrace{\frac{3}{4}}_{\alpha}$.

D'où

$$\mathcal{Q}(x) = x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(1+\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow J = \int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2\right)} dx$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2} dx.$$

On effectue maintenant le changement de variable $u = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}) \Rightarrow du = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$,
donc $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} du$.

Alors,

$$\begin{aligned} J &= \frac{4}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan u + c \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right) + c \end{aligned}$$

D'où

$$I = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right) + c$$

2. **Deuxième cas.** Si $\mathcal{Q}(x)$ s'annule sur $\mathbb{R}$ $(\Delta_{\mathcal{Q}(x)} > 0)$

Exemple 6.4.4 $I = \int \frac{x+2}{x^2-3x-4}dx$, $\Delta_{\mathcal{Q}(x)} = 9-4(1)(-4) = 25 \Rightarrow x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ *et* $x_2 = \frac{3+5}{2} = 4 \Rightarrow \mathcal{Q}(x) = (x+1)(x-4)$.

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2-3x-4} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} \\ &= \frac{Ax-4A+Bx+B}{(x+1)(x-4)} \\ &= \frac{(A+B)x+(B-4A)}{(x+1)(x-4)} \end{aligned}$$

En comparant avec $\frac{x+2}{x^2-3x-4}$, *on trouve*

$$\begin{cases} A+B=1 \\ b-4A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{5} \\ B=\frac{6}{5} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{6}{5}\int\frac{dx}{x-4} \\ &= -\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{6}{5}\ln|x-4| + c \end{aligned}$$

3. **Troisième cas.** Si $\mathcal{Q}(x)$ possède une racine double dans $\mathbb{R}$ $(\Delta_{\mathcal{Q}(x)} = 0)$

Exemple 6.4.5 $I = \int \frac{3x+1}{x^2+2x+1}dx$, $\Delta_{\mathcal{Q}(x)} = 4-4 = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a} = -1$, *d'où* $\mathcal{Q}(x) = (x+1)^2$.

Par suite

$$\begin{aligned}\frac{3x+1}{x^2+2x+1} &= \frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} \\ &= \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+(A+B)}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

En comparant avec $\dfrac{3x+1}{x^2+2x+1}$, *on trouve*

$$\begin{cases} A = 3 \\ A+B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -2 \end{cases}$$

D'où (avec $u = x+1 \Rightarrow du = dx$*)*

$$\begin{aligned} I &= 3\int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= 3\ln|x+1| - 2\int \frac{du}{u^2} + c \\ &= 3\ln|x+1| - 2\left[-\frac{1}{u}\right] + c \end{aligned}$$

Finalement

$$I = 3\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + c$$

6.4.4 Intégration des fonctions trigonométriques

On effectue généralement le changement de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$, donc

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \text{ et } dx = \frac{2}{1+t^2}dt \tag{6.4.3}$$

Exemple 6.4.6 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{2-\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2-\frac{2t}{1+t^2}}dt = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2-2t}{1+t^2}}dt = \int \frac{1}{t^2-t+1}dt,$

$\Delta_{\mathcal{Q}(t)} < 0 \Rightarrow \mathcal{Q}(t) \neq 0$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $\mathcal{P}(t) = 1$, *donc, la primitive sera* $\arctan u + c$.

Comme $b = -1 \Rightarrow \dfrac{b}{2} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{Q}(t) = t^2 - t + 1 = \left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \alpha = t^2 - t + \dfrac{1}{4} + \underbrace{\dfrac{3}{4}}_{\alpha}$.

Alors, $\mathcal{Q}(t) = \dfrac{3}{4}\left(1 + \dfrac{4}{3}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2\right) = \dfrac{3}{4}\left(1 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2\right)$.

Ainsi,

$$I = \frac{4}{3}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

On effectue ensuite le changement de variable $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow du = \frac{2}{\sqrt{3}}dt$, *donc* $dt = \frac{\sqrt{3}}{2}du$.

On obtient alors

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan u + c \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) + c \end{aligned}$$

Finalement

$$I = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\right) + c$$

Bibliographie

[1] G. Faccanoni. Aide mémoire et exercices corrigés, L2 Mass, 2013.

[2] T. Gallouet. Analyse 1ère année, Université de Marseille, 2013.

[3] W.J. Kaczor, M.T. Nowak. Problèmes d'analyse, EDP Sciences, 2008.

[4] G. Lafaille, C. Pauly. Cours d'analyse 1, Thieg publications, 2006.

[5] M. Mehbali. Mathématiques, OPU, 2003.

[6] J.M. Monier. Méthodes et exercices de mathématiques MPSI, Dunod, 2008.

[7] D. Muller. Fonctions d'une variable, Nymphomath, 2013.

[8] B. Oukacha. Mathématiques. Analyse, cours et exercices corrigés, Pages Bleues, 2016.

[9] B. Oukacha. Maths 1. Sujets d'examens corrigés, Pages Bleues, 2016.

[10] B. Oukacha. Maths 2. Sujets d'examens corrigés, Pages Bleues, 2016.

[11] A. Popier. Analyse. Licence 1, Université du Maine, 2010.

[12] F. Santambrogio. Mathématiques, Polytech'Paris-Sud, 2012.

[13] J. Vélu. Mathématiques générales, Dunod, 2003.