الجـــمهوريـــة الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــــة

وزارة التعليم العالـــي و البحث العلمــــي

المدرسة العليا لعلـــوم التسييـــر

Ecole Supérieure des Sciences de Gestion ANNABA

Intitulé du Polycopié

Cours d'analyse mathématique 3 et 4

Module : Analyse Mathématique 3 et 4.

Classes : Préparatoires.

Niveau : Deuxième Année

Polycopié Réalisé Par :

Benchettah Djaber Chemseddine

Année Universitaire

2019/2020

Engagement

Je soussignée **Mr Benchettah djaber chemseddine**, Maitre de conférence classe B au sein de l'école supérieure des sciences de gestion-Annaba, atteste sur l'honneur que ce polycopie d'analyse mathématique intitulé : « **Cours d'analyse numérique 3 et 4** » destiné aux étudiants des classes préparatoires plus précisément, les étudiants en deuxième année, est le fruit d'une expérience de plusieurs années d'enseignement en cycle préparatoire à l'école supérieure des sciences de gestion Annaba.

Ce document est personnel et cite en référence toutes les sources utilisées.

Fait pour servir et valoir ce que de droit

PROGRAMME PEDAGOGIQUE D'ANALYSE MATHÉMATIQUE 3 ET 4 DES CLASSES PRÉPARATOIRES EN SCIENCES ÉCONOMIQUES, DE GESTION ET COMMERCIALES

Chapitre 1: Séries Numériques
- Définition.
- Propriétés élémentaires des séries numériques.
- Séries numériques á termes positifs (règle de d'Alembert et règle de Cauchy).
- Méthodes de comparaison et des équivalents.
- Séries absolument convergentes, séries remarquables (séries géométriques et dérivées, série exponentielle, série de Riemann).

Chapitre 2: Intégrales Impropres
- Intégrale impropre sur un intervalle semi-ouvert.
- Propriétés des intégrales impropres.
- Intégrales impropres de fonctions positives (règle de comparaison et des équivalents).
- Intégrales impropres de fonctions de signe quelconque (convergence absolue, changement de variable).
- Étude de la fonction Gamma et Béta.

Chapitre 3: Fonctions á deux variables (éliminer les extremums liées)
- Notion de norme et distance-Partie ouverte et partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
- Fonction numérique de deux variables (domaine de définition et représentation graphique).
- Courbe de niveau et isoquants, fonctions partielles.
- Limite et continuité des fonctions de deux variables.
- Opérations sur les fonctions continues.
- Dérivées partielles premières et secondes.
- Théorèmes fondamentaux sur les fonctions de deux variables.
- Différentielle d'une variable.
- Développement limites d'une fonction de deux variables recherche d'extremums locaux d'une fonction de deux variables (extremums libres).
- **Applications:** Courbes d'indifférence (cadre de la fonction d'utilité du consommateur), étude de la fonction.

Cobb-Douglas (productivités marginales, élasticité de la production par rapport au travail) droit de régression.

Chapitre 4: Intégrales Doubles
- Intégrale double d'une fonction continue sur un rectangle.
- Propriété des intégrales doubles.
- Théorème de Fubini Changement de variables dans une intégrale double (Coordonnées polaires, coordonnées curvilignes).

Chapitre 5: Équations Différentielles
- Équations différentielles du premier ordre (équation á variables séparées, équations homogènes, équations linéaires, équation de Bernoulli, équation de Riccati).
- Équations différentielles du second ordre linéaires Ã coefficients constants.

Table des matières

Préface

Ce polycopie est destiné aux étudiants de deuxième année des classes préparatoires pour préparer le concours d'accès aux grandes écoles, il peut être aussi utile à ceux de la deuxième année LMD Mathématiques et Informatique, Sciences et Technologie.
Il a pour objectif d'introduire les principales notions mathématiques qui sont indispensables à toute formation dans les études supérieures. La maitrise des techniques utilisées dans cet polycopié exige la connaissance des outils mathématiques faisant partie du programme de première année des classes préparatoires (Analyse mathématique 1 et 2).
j'espère que ce polycopié aidera les étudiants à préparer le concours d'accès au second cycle des grandes écoles et leurs faciliter la lecture d'autres ouvrages.
Ce document retranscrit le Cours tel qu'il a été donné aux étudiants.

CHAPITRE 1
Séries Numériques

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à des sommes ayant une infinité de termes. Par exemple qu'est-ce qui se passe quand on pousse une somme partielle jusqu'au bout, quand on additionne l'infinité de terme de la suite?

Cette question a été popularisée sous le nom du paradoxe du Zénon, qui prétendait que le mouvement est une impossibilité. Supposons que je cours vers un arbre situé à un kilomètre de ma position. Pour franchir cette distance, je devrais d'abord parcourir la moitié de la distance qui me sépare de cette arbre. Puis, je devrais parcourir la moitié de la distance restante. Une fois cela fait, je devrais encore parcourir la moitié de la distance restante, et ainsi de suite. Zénon prétendait que le nombre d'étapes à parcourir étant infinie, je n'arriverais jamais à parcourir la distance qui me sépare de l'arbre.

Ce paradoxe semble relativement contre-intuitif, mais il peut se résoudre facilement d'un point de vue mathématique. La suite des distances à parcourir n'est autre que la suite des puissances de deux: je dois parcourir la moitié de la distance, puis le quart, puis le huitième, et ainsi de suite: on a bien la suite définie par $u_n = \frac{1}{2^n}$ où $n = 1$. Le philosophe Zénon pense que le nombre de termes de cette suite étant infinie, la somme de la totalité des termes l'est aussi. Mais ce n'est pas le cas car la somme d'une infinité de termes peut être une valeur finie: la somme de ces termes vaut 1 !

Les mathématiciens ont découvert que certaines séries ne donnent pas de résultats finis: soit ce résultat n'existe pas, soit il est infini. Ces séries sont appelées des séries divergentes. Mais il s'avère que certaines séries donnent un résultat fini: ces séries sont alors des séries convergentes. Par exemple, Euler a montré que e, la base des logarithmes népériens, est le résultat de la série associée à la suite des inverses des factorielles.

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

1.1 Généralités sur les séries numériques

1.1.1 Quelques définitions et propriétés sur les séries numériques

Définition 1.1 *Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels. On pose*

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite $(S_n)_{n\geq 0}$ *s'appelle la série de terme général* u_k. *La suite* (S_n) *s'appelle aussi la suite des sommes partielles.*

On peut noter cette série de différentes façons :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n, \sum_{k\geq 0} u_k, \sum u_k, \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Pour notre part, on fera la distinction entre une série quelconque $\sum_{k\geq 0} u_k$, et on réservera la notation $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ à une série convergente ou à sa somme.

Exemple 1.1 *Définissons la suite* $(u_k)_{k\geq 0}$ *par* $u_k = q^k$ *où* $q \in \mathbb{R}$; *c'est une suite géométrique. La série géométrique* $\sum_{k\geq 0} q^k$ *est la suite des sommes partielles suivantes :*

$$S_0 = 1 \quad S_1 = 1+q \quad S_2 = 1+q+q^2 \quad \ldots S_n = 1+q+q^2+\ldots+q^n \ldots$$

Définition 1.2 *Soit* $(u_k)_{k\geq 0}$ *une suite de nombres réels.*

On dit que la série de terme général u_k *converge, si et seulement si la suite* (S_n) *est convergente.*

Sa limite se note alors : $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, *et est appelée « somme de la série ».*

Si une série n'est pas convergente, on dit qu'elle diverge.

On appelle reste d'ordre n d'une série convergente $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ *la quantité :*

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Proposition 1.1 *Si une série est convergente, alors* $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Preuve. $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$. Donc $R_n = S - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$. ■

Exemple 1.2 1− *Si* $u_k = 1$, *pour* $k \geq 0$, *la série* $\sum_{k\geq 0} u_k$ *est divergente car :*

$$S_n = u_0 + \ldots + u_n = \underbrace{1+\ldots+1}_{(n+1)\ fois} = n+1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

d'où la suite (S_n) *est divergente.*

2− *Si on revient à l'exemple du paradoxe de Zénon* $u_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, *pour* $k \geq 1$, *la série* $\sum_{k\geq 1} u_k$ *est convergente car :*

$$S_n = 1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = 1.$$

d'où la suite (S_n) *est convergente.*

Remarque 1.1 *- Les premiers termes n'interviennent pas pour la convergence d'une série.*

- Tous les critères de convergence restent donc valables si les conditions demandées sont remplies « à partir d'un certain rang ».

- En cas de convergence, la valeur des premiers termes en revanche influe sur la somme de la série.

- Les sommes partielles d'une série sont toujours définies, mais les restes ne le sont que lorsque la série converge.

Propriété 1.1 *Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries numériques et α un scalaire non nul :*

$\star$ *Si $\sum u_k$ converge vers a, et $\sum v_k$ converge vers l alors la série $\sum (u_k + v_k)$ converge vers $(a+l)$.*

$\star$ *Si $\sum u_k$ converge vers a alors $\sum \alpha.u_k$ converge vers αa.*

$\star$ *Si $\sum u_k$ converge, et $\sum v_k$ diverge alors la série $\sum (u_k + v_k)$ diverge.*

Remarque 1.2 *Si les deux séries sont divergentes, on ne peut rien dire sur la nature de leur somme.*

Exemple 1.3 $1-$ *La série $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{7^k+3^k}{2^k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{7}{2}\right)^k + \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{2}\right)^k$ est une somme de deux série divergentes et elle est divergente car : si on calcule les termes de la suites des sommes partielles S_n on aura :*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

$2-$ *Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ telle que $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N},\ u_k = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N},\ v_k = -1 \end{cases}$, les deux séries divergent, mais la série $\sum (u_k + v_k)$ converge.*

1.1.2 Condition nécessaire de convergence

Théorème 1.1 *Si la série $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ converge, alors la suite des termes généraux $(u_k)_{k\geq 0}$ tend vers 0 lorsque $k \to +\infty$.*

Preuve. Pour tout $k \geq 0$, posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$. pour tout $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ converge, la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge vers la somme S. Il est de même de la suite $(S_{n-1})_{n\geq 1}$. Par linéairité de la limite, la suite (u_k) tend vers $S - S = 0$. ■

Théorème 1.2 ***Critére de divergence grossière***

Si le terme général u_k de la série ne tend pas vers 0, alors la série $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ diverge.

Preuve. C'est la contraposée de l'implication précédente du Théorème 1.1. ■

Exemple 1.4 $1-$ *La série $\sum\limits_{k\geq 1} \left(\frac{3}{2}\right)^k$ diverge, car $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = +\infty \neq 0$.*

$2-$ *La série $\sum\limits_{k\geq 1} \left(\frac{3k+2}{2k+1}\right)$ diverge, car $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\frac{3k+2}{2k+1}\right) = \frac{3}{2} \neq 0$.*

Remarque 1.3 ***ATTENTION!***

La réciproque du Théorème 1.1 est fausse, car la série $\sum_{k\geq 0} \ln\left(\frac{k+3}{k+2}\right)$ *diverge, alors que la* $\lim_{k\to+\infty} \ln\left(\frac{k+3}{k+2}\right) = 0$. *On a :*

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{k+3}{k+2}\right) &= \ln(k+3) - \ln(k+2) \Longrightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{k+3}{k+2}\right) \\
S_n &= \sum_{k=0}^{n} [\ln(k+3) - \ln(k+2)] \\
&= (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \ldots + (\ln(n+2) - \ln(n+1)) + (\ln(n+3) - \ln(n+2)) \\
&= -\ln 2 + \ln(n+3) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} +\infty.
\end{aligned}
$$

1.1.3 Critère de Cauchy

Rappel Une suite (S_n) de nombres réels converge si et seulement si elle est une suite de Cauchy, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ p \geq N \text{ et } q \geq N\ , q \geq p \quad \Longrightarrow \quad |S_p - S_q| < \varepsilon.$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p > 0,\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Pour les séries cela donne :

Théorème 1.3 (*Critère de Cauchy*)

Une série $\sum u_k$ *est convergente ssi*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p > 0,\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| < \varepsilon.$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p > 0,\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Preuve. Par définition une série $\sum u_k$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles (S_n) converge et dire que la suite (S_n) des sommes partielles converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy, c-à-d :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p > 0,\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Ensuite il suffit de remarquer que

$$|S_{n+p} - S_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k|.$$

■

Exemple 1.5 *Prenons la suite des sommes partielles harmonique* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. *Calculons la différence de deux sommes partielles, afin de conserver les termes entre* $n+1$
(qui joue le rôle de p*) et* $2n$ *(qui joue le rôle de* q*) :*

$$|S_{2n} - S_n| = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

La suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy, donc la série ne converge pas.

1.1.4 Séries de référence

Séries géométriques

Proposition 1.2 *Soit* $q \in \mathbb{R}$*, la série géométrique* $\sum_{k\geq 0} q^k$ *est convergente si et seulement si* $|q| < 1$. *on a alors :*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(q)^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.}$$

Preuve. Considérons

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n.$$

• Écartons tout de suite le cas $q = 1$, pour lequel $S_n = n+1$. Dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, la série diverge.

• Soit $q \neq 1$ et multiplions S_n par $1-q$:

$$\left(1-q\right) S_n = \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^n\right) - \left(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}\right) = 1 - q^{n+1}.$$

Donc

$$\boxed{S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Si $|q| < 1$, alors $q^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et ainsi $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$. Dans ce cas la série $\sum_{k\geq 0} q^k$ converge.

Si $|q| \geq 1$, alors q^{n+1} n'a pas de limite finie (elle peut tendre vers $+\infty$, par exemple si $q = 2$; ou bien être divergente, par exemple si $q = -1$). Dans ce cas la série
$\sum_{k\geq 0} q^k$ diverge. ■

Exemple 1.6 *Voici quelques exemples sur les séries géométriques*

1– $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, *donc la série* $\sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ *est convergente.*

2 – $\sum_{k=0}^{+\infty} (2)^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(2)^{n+1}}{1-2} = +\infty$, *donc la série* $\sum_{k\geq 0} (2)^k$ *est divergente.*

3– $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{-1}{5}\right)^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$, *donc la série* $\sum_{k\geq 0} \left(\frac{-1}{5}\right)^k$ *est convergente.*

Séries télescopiques

Proposition 1.3 *Une série télescopique de nombres réels* $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ *, avec* $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = a_{k+1} - a_k$ *ou* $u_k = a_k - a_{k+1}$, *converge ssi* $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = l$ *existe et dans ce cas on a :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (a_{k+1} - a_k) = l - a_0 \quad ou \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - l.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k), \\ &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n), \\ &= a_{n+1} - a_0. \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = l - a_0.$$

■

Exemple 1.7 *Voici un exemple important pour ce type de série*

1- La série $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ *est une série télescopique on a :*

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2},$$

donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = 1 - \frac{1}{n+2},$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \lim_{n\to+\infty} S_n = 1.$$

Donc $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ *est convergente.*

2- La série $\sum\limits_{k\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ *est une série télescopique on a :*

$$\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln(k-1) - \ln(k),$$

donc

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \ln(k) = \ln(1) - \ln(n),$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty.$$

Donc $\sum\limits_{k\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ *est divergente.*

1.2 Séries à termes positifs

1.2.1 Convergence par les sommes partielles

Rappels Soit $(s_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de nombres réels.

⋆ Si la suite est majorée, alors la suite (s_n) converge, c'est-à-dire qu'elle admet une limite finie.

⋆ Sinon la suite (s_n) tend vers $+\infty$.

Appliquons ceci aux séries $\sum u_k$ à termes positifs, où $u_k \geq 0$ pour tout k. Dans ce cas la suite (S_n) des sommes partielles, définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est une suite croissante :

$$S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0.$$

Proposition 1.4 *(Convergence par les sommes partielles)*

Une série à termes positifs est une série convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. Autrement dit, si et seulement s'il existe

$M > 0$ *tel que, pour tout* $n \geq 0$, $S_n \leq M$ *et on a :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

Une série à termes positifs est une série divergente si et seulement si la suite des sommes partielles est non majorée et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

Preuve. La preuve de cette proposition est trés simple et basée sur un résultat (vu en 1ère année) de convergence des suites monotones vu au rappel ci-dessus. ■

1.2.2 Théorème de comparaison

Pour étudier les séries à termes positifs, On les compare avec des séries classiques simples au moyen du théorème de comparaison suivant.

Théorème 1.4 (*Théorème de comparaison*)

Soient $\sum u_k$ *et* $\sum v_k$ *deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose qu'il existe* $k_0 \geq 0$ *tel que, pour tout* $k \geq k_0$, $u_k \leq v_k$.

- *Si la série* $\sum v_k$ *converge, alors la série* $\sum u_k$ *converge.*
- *Si la série* $\sum u_k$ *diverge, alors la série* $\sum v_k$ *diverge.*

Preuve. Comme nous l'avons observé, la convergence ne dépend pas des premiers termes. Sans perte de généralité on peut donc supposer $k_0 = 0$.

Notons $U_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ et $V_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ les suites des sommes partielles respectives des séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$. Les suites U_n et V_n sont croissantes, et

de plus, pour tout $n \geq 0$,

$$U_n \leq V_n.$$

Si la série $\sum v_k$ converge, alors la suite (V_n) converge, et si c'est le cas la suite (V_n) est bornée par un certain réel $M > 0$:

$$V_n \leq M \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

De plus, on a pour tout $k \geq 0$, $u_k \leq v_k$ alors on en déduit que

$$U_n \leq M \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

Donc, la suite des sommes partielles U_n étant croissante majorée, elle converge.

Inversement, si la série $\sum u_k$ diverge, alors la suite (U_n) tend vers $+\infty$, et la suite (V_n) tend vers $+\infty$ et ainsi la série $\sum v_k$ diverge. ■

Exemple 1.8 *Nous avons déjà vu dans l'exemple 1.7 que la série*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad \textit{converge.}$$

1− *La série* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ *converge car pour tout* $k \geq 4$ *on a* $\frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{(k+1)(k+2)}$*, On en déduit que la série* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$*, d'où la convergence* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ *par linéarité .*

2− *La série* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ *converge car pour tout* $k \geq 2$ *on a* $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)}$*, comme* $\sum\limits_{k\geq 2} \frac{1}{k(k-1)} = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ *(par changement d'indice) est une série convergente.Donc la*

série $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ *converge.*

3− *La série* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ *diverge car pour tout* $k \geq 1$ *on a* $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ *et la série harmonique* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ *est divergente donc* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ *diverge.*

1.2.3 Théorème d'équivalence

Théorème 1.5 (*Critère d'équivalence*)

Soient (u_k) et (v_k) deux suites à termes strictement positifs. On pose :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_k}{v_k} = l.$$

Si $l \in \mathbb{R}^*$, alors les deux suites (u_k) et (v_k) sont équivalentes et on note $u_k \sim l\, v_k$. Donc $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.

Preuve. Par hypothèse, $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \geq 0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, $l \in \mathbb{R}^*$,

$$|\frac{u_k}{v_k} - l| < \varepsilon,$$

ce qui donne

$$(l-\varepsilon)\, v_k < u_k < (l+\varepsilon)\, v_k.$$

Fixons un $\varepsilon < 1$. Si $\sum u_k$ converge, alors par le théorème de comparaison, $\sum (l-\varepsilon)\, v_k$ converge, donc $\sum v_k$ converge aussi.

Réciproquement, si $\sum u_k$ diverge, alors $\sum (l+\varepsilon)\, v_k$ diverge, donc $\sum v_k$ diverge aussi. ■

Remarque 1.4 *Si les suites sont équivalentes alors elles sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes. Bien sûr, en cas de convergence, il n'y a*

aucune raison que les sommes soient égales. Enfin, si les suites sont toutes les deux strictement négatives, la conclusion reste valable.

Théorème 1.6 *Soient (u_k) et (v_k) deux suites à termes strictement positifs. On pose :*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_k}{v_k} = l.$$

1− *Si $l = 0$ et la série $\sum v_k$ converge $\Longrightarrow$ $\sum u_k$ converge.*

2− *Si $l = +\infty$ et.la série $\sum v_k$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum u_k$ diverge.*

Preuve. 1− Par définition $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq k_0$,

$$|u_k| < \varepsilon\, |v_k|,$$

Donc si $\sum \varepsilon\, |v_k|$ converge, et $\sum v_k$ converge aussi, alors par le théorème de comparaison $\sum u_k$ converge.

2− Par définition $\forall A \in \mathbb{R}, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq k_0$,

$$u_k > A v_k,$$

Donc si $\sum Av_k$ diverge, et $\sum v_k$ diverge aussi, alors par le théorème de comparaison $\sum u_k$ converge. ■

Exemple 1.9 1− *Les suites* $\frac{1}{k^2}$ *et* $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ *sont équivalentes car*

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}=1.\textit{comme la série}\sum\frac{1}{(k+1)(k+2)}\textit{ converge,}$$

alors la série $\sum\frac{1}{k^2}$ *converge.*

2− *Les séries* $\sum\frac{k^2+3k+1}{k^3+2k^2+4}$ *et* $\sum\frac{1}{k}$ *sont de même nature car*

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{k^2+3k+1}{k^3+2k^2+4}}{\frac{1}{k}}=1.\textit{comme la série}\sum\frac{1}{k}\textit{ diverge,}$$

alors la série $\sum\frac{k^2+3k+1}{k^3+2k^2+4}$ *diverge.*

3− *La série* $\sum\frac{\ln(k)}{k^3}$ *converge car*

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{\ln(k)}{k^3}}{\frac{1}{k^2}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\ln(k)}{k}=0\textit{ et la série}\sum\frac{1}{k^2}\textit{ converge.}$$

4− *La série* $\sum\frac{1}{(k)^{\frac{1}{5}}\sqrt{\ln(k)}}$ *diverge car*

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{1}{(k)^{\frac{1}{5}}\sqrt{\ln(k)}}}{\frac{1}{k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k^{\frac{4}{5}}}{\sqrt{\ln(k)}}=+\infty\textit{ et la série }\sum\frac{1}{k}\textit{ diverge.}$$

1.2.4 Comparaison série/intégrale

Théorème 1.7 *Soit* $f:[0,+\infty[\,\to[0,+\infty[$ *une fonction décroissante. Alors la série* $\sum_{k\geq 0}u_k$ *où* $u_k=f(k)$, *et l'intégrale impropre* $\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$ *sont de même nature.*

Preuve. Soit $k\in\mathbb{N}$, Comme f est décroissante, pour $k\leq t\leq k+1$, on a $f(k+1)\leq f(t)\leq f(k)$. En intégrant sur l'intervalle $[k,k+1]$ de longueur 1, on obtient :

$$f(k+1)\leq\int_k^{k+1}f(t)\,dt\leq f(k).$$

On somme ces inégalités pour k variant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(k+1)\leq\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f(t)\,dt\leq\sum_{k=0}^{n-1}f(k).$$

On aura

$$u_1 + \ldots + u_n \leq \int_0^n f(t)\,dt \leq u_0 + \ldots + u_{n-1}.$$

La série $\sum u_k$ converge et a pour somme S si et seulement si la suite des sommes partielles converge vers S. Si c'est le cas $\int_0^n f(t)\,dt$ est majorée par S, et comme $\int_0^x f(t)\,dt$ est une fonction croissante de x (par positivité de f), l'intégrale converge. Réciproquement, si l'intégrale converge, alors $\int_0^n f(t)\,dt$ est majorée, la suite des sommes partielles aussi, et la série converge. ■

1.2.5 Séries de Riemann et règle $k^\alpha u_k$

Proposition 1.5 *Considérons la série de Riemann de la forme suivante :* $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ *avec* $\alpha > 0$ *un réel, alors on a :*

⋆ *Si* $\alpha > 1$, *la série de Riemann* $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ *converge.*

⋆ *Si* $0 < \alpha \leq 1$, *la série de Riemann* $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ *diverge.*

Preuve. Nous appliquons à $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, pour $\alpha > 0$, c'est une fonction décroissante et positive. On peut appliquer le théorème 1.7.

On sait que :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente, donc la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.

Pour $0 < \alpha \leq 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est divergente, donc la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge. ■

Exemple 1.10 1− $\sum \frac{1}{k^2}$ *est une série convergente d'aprés Riemann car* $\alpha = 2 > 1$.

2− $\sum \frac{1}{k}$ *est une série divergente d'aprés Riemann car* $\alpha = 1 \leq 1$.

Proposition 1.6 *Soit* $\sum u_k$ *une série à termes positifs. On pose*

$$l = \lim_{k\to+\infty} k^\alpha u_k.$$

⋆ *Si* $l \in \mathbb{R}^*$, *alors les deux séries* $\sum u_k$ *et* $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ *sont de même nature.*

⋆ *Si* $l = 0$ *et* $\alpha > 1$ *alors la série* $\sum u_k$ *est convergente.*

⋆ *Si* $l = +\infty$ *et* $0 < \alpha \leq 1$ *alors la série* $\sum u_k$ *est divergente.*

Exemple 1.11 1− *Soit la série* $\sum_{k\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right)$.

Comme $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{k^3}} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ *car* $\lim_{k\to+\infty} k^{\frac{3}{2}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right) = 1$ *et comme* $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ *d'aprés Riemann* $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ *est une série convergente par équivalence la série* $\sum_{k\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right)$ *est convergente.*

2− *Soit la série* $\sum \frac{1}{\sqrt{k}\ln(k)}$.

Comme $\lim_{k\to+\infty} k u_k = \lim_{k\to+\infty} k\frac{1}{\sqrt{k}\ln(k)} = +\infty$.

3− *Soit la série* $\sum \frac{1}{\sqrt{k^3}\sqrt{\ln(k)}}$

Comme $\lim_{k\to+\infty} k^{\frac{7}{6}} u_k = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}-\frac{7}{6}}\sqrt{\ln(k)}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}\sqrt{\ln(k)}} = 0$ *et comme* $\alpha = \frac{7}{6} > 1$ *alors la série* $\sum \frac{1}{\sqrt{k^3}\sqrt{\ln(k)}}$ *est convergente.*

1.2.6 Séries de Bertrand

Proposition 1.7 *Soit la série de Bertrand*

$$\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^a (\ln(k))^b}.$$

⋆ *Si* $a > 1$ *la série converge.*

⋆ *Si* $0 < a < 1$ *la série diverge.*

⋆ *Si* $a = 1$ *et* $\begin{cases} b > 1 \text{ la série converge.} \\ b \leq 1 \text{ la série diverge.} \end{cases}$

Preuve. On a $\lim_{k\to+\infty} k^\alpha \frac{1}{k^a(\ln(k))^b} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^{\alpha-a}}{(\ln(k))^b} = \begin{cases} +\infty & \alpha > a \\ 0 & \alpha < a \end{cases}$

1) $1 < \alpha < a$, $\lim_{k\to+\infty} \frac{k^{\alpha-a}}{(\ln(k))^b} = 0$.

On choisit $1 < \alpha \Longrightarrow$ la série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^a(\ln(k))^b}$ converge pour $1 < a$ et $\forall b$.

2) $a < \alpha < 1$, $\lim_{k\to+\infty} \frac{k^{\alpha-a}}{(\ln(k))^b} = +\infty$.

On choisit $0 < \alpha < 1 \Longrightarrow$ la série $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^a(\ln(k))^b}$ diverge pour $0 < a < 1$ et $\forall b$.

3) $a = 1$, soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(t) = \frac{1}{t(\ln(t))^b}$, c'est une fonction décroissante et positive. On peut appliquer le théorème 1.7.

On sait que :

$$\int_2^x \frac{1}{t(\ln(t))^b} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-b}\left(\ln(x)^{1-b} - (\ln 2)^{1-b}\right) & \text{si } b \neq 1 \\ \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) & \text{si } b = 1 \end{cases}$$

Pour $b \neq 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^b} dt = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{t(\ln(t))^b} dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-b}\left(\ln(x)^{1-b} - (\ln 2)^{1-b}\right) = \begin{cases} +\infty & b < 1 \\ -\frac{1}{1-b}(\ln 2)^{1-b}, & b > 1 \end{cases}$$

Pour $b=1$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^b}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{t(\ln(t))^b}dt = \lim_{x\to+\infty} \ln(\ln(x)) - \ln(\ln 2) = +\infty.$

Donc, pour $a=1$ et $b>1$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^b}dt$ converge $\Longrightarrow \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(\ln(k))^b}$ converge.

Pour $a=1$ et $b\leq 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^b}dt$ diverge $\Longrightarrow \sum_{k\geq 2} \frac{1}{k(\ln(k))^b}$ diverge. ■

Exemple 1.12 *Soit la série*

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{k\sqrt{\ln k}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}.$$

Comme $\frac{1-\cos\left(\frac{1}{k\sqrt{\ln k}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{k}\right)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k\ln k}$, *$a=1$ et $b=1$ d'aprés Bertrand la série* $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k\ln k}$ *est divergente par équivalence la série* $\sum_{k\geq 1} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{k\sqrt{\ln k}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}$ *est convergente.*

1.2.7 Règles de d'Alembert et de Cauchy

Théorème 1.8 *(Règle du quotient de d'Alembert)*

Soit $\sum u_k$ *une série à termes strictement positifs, telle que* $\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = l$, *alors :*

1• *Si* $l<1$ *alors* $\sum u_k$ *converge.*

2• *Si* $l>1$ *alors* $\sum u_k$ *diverge.*

3• *Si* $l=1$ *on peut rien conclure.*

Exemple 1.13 .

1− $\sum_{k\geq 0} \frac{k!}{1.3\ldots(2k-1)}$ *converge, car* $\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{2k+1} = \frac{1}{2} < 1.$

2− $\sum_{k\geq 0} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ *diverge, car* $\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} = 4 > 1.$

Théorème 1.9 *(Règle des racines de Cauchy)*

Soit $\sum u_k$ *une série à termes positifs, telle que* $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = l$, *alors :*

1• *Si* $l<1$ *alors* $\sum u_k$ *converge.*

2• *Si* $l>1$ *alors* $\sum u_k$ *diverge.*

3• *Si* $l=1$ *on peut rien conclure.*

Exemple 1.14 .

1− $\sum_{k\geq 0} \left(\frac{2k+1}{3k+4}\right)^k$ *converge, car* $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2k+1}{3k+4} = \frac{2}{3} < 1.$

2− $\sum_{k\geq 0} \left(\frac{5k+3}{2k-1}\right)^k$ *diverge, car* $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{5k+3}{2k-1} = \frac{5}{2} > 1.$

Une question se pose maintenant, peut-on avoir des limites différentes en appliquant les deux règles de d'Alembert et Cauchy?

La réponse est donnée par la proposition suivante.

Proposition 1.8 *Soit $\sum u_k$ une série à termes strictement positifs.*

$$\textit{Si} \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = l \qquad \textit{alors} \qquad \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = l.$$

La réciproque est fausse. En effet, il suffit de considérer la série $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ où

$$u_k = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^k & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \frac{2^k}{3^{k+1}} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 2 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors la règle de d'Alembert ne s'applique pas.

Pourtant, $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = \frac{2}{3} < 1$, donc la règle de Cauchy s'applique et la série $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ converge.

Cet exemple montre que la règle de Cauchy est plus puissant que celle de de d'Alembert.

1.2.8 Règle de Raabe-Duhamel

Proposition 1.9 *(Règle de Raabe-Duhamel)*

Soit $\sum u_k$ une série à termes strictement positifs. Posons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = 1 - \frac{\alpha}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \quad \textit{où} \quad \lim_{k\to+\infty} k\left(1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \alpha.$$

1• *Si $\alpha > 1$, alors la série $\sum u_k$ converge.*

2• *Si $\alpha < 1$, alors la série $\sum u_k$ diverge.*

3• *Si $\alpha = 1$, on peut rien dire.*

Exemple 1.15 .

Soit série $\sum k!\left(\frac{k}{e}\right)^k$

On a $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{e}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = e^{-1}e^{k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} = e^{-1}e^{k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)} = e^{-1}e^{\left(1-\frac{1}{2k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)} = e^{\left(-\frac{1}{2k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right)} = 1 - \frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right)$.

d'où la série $\sum k!\left(\frac{k}{e}\right)^k$ diverge car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

1.3 Séries à termes quelconques

Définition 1.3 *On appelle série à termes quelconques une série $\sum u_k$ dont les termes peuvent être positifs ou négatifs suivant les valeurs prises par k.*

Exemple 1.16 *Les séries $\sum\limits_{k\geq 0} \cos(k)$ et $\sum\limits_{k\geq 0} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$ sont à termes quelconques.*

1.3.1 Critère d'Abel

Théorème 1.10 *(Théorème de sommation d'Abel)*

Soit $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ une série à termes quelconques. On suppose que $u_k = a_k.b_k$, avec b_k strictement positif, telles que:

1• La suite $(b_k)_{k\geq 0}$ est décroissante et tend vers 0 $\left(b_{k+1} \leq b_k,\ \forall k \in \mathbb{N} \text{ et } \lim\limits_{k\to+\infty} b_k = 0\right)$.

2• Les sommes partielles de la suite $(a_k)_{k\geq 0}$ sont bornées :

$$\exists M > 0,\ \forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow |a_0 + \ldots + a_n| \leq M.$$

Alors la série $\sum\limits_{k\geq 0} a_k.b_k$ converge.

Exemple 1.17 .

Montrer que la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ est convergente

Soit $a_k = (-1)^k$ et $b_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. on a

• La suite $b_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ est décroissante et $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 0$.

• $|a_0 + \ldots + a_n| = |(-1)^0 + \ldots + (-1)^n| = \begin{cases} 0 & n \text{ impair} \\ 1 & n \text{ pair} \end{cases} \leq M = 1.$

1.3.2 Séries alternées

Définition 1.4 *Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite qui vérifie $u_k \geq 0$. La série $\sum\limits_{k\geq 0} (-1)^k u_k$ ou $\sum\limits_{k\geq 0} (-1)^{k+1} u_k$ s'appelle une série **alternée**.*

Théorème 1.11 *(Critère de Leibniz)*

Supposons que $(u_k)_{k\geq 0}$ soit une suite qui vérifie :

1• $u_k \geq 0$ pour tout $k \geq 0$,

2• la suite (u_k) est une suite décroissante,

3• $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$.

Alors la série alternée $\sum\limits_{k\geq 0} (-1)^k u_k$ converge.

Exemple 1.18 .

Soit la série alternée suivante :

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$$

1• $u_k = \frac{1}{k} \geq 0$ *pour tout* $k \geq 1$.

2• $u_{k+1} - u_k = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{-1}{k(k+1)} \leq 0$, *donc* (u_k) *est une suite décroissante.*

3• $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$.

D'aprés le critère de Leibniz la série alternée $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k}$ *converge.*

1.4 Séries absolument convergentes

Définition 1.5 *Une série* $\sum u_k$ *est dite* ***absolument convergente*** *si la série* $\sum |u_k|$ *est* ***convergente****.*

Proposition 1.10 *Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.*

$$\sum |u_k| \quad \textit{converge} \Longrightarrow \sum u_k \quad \textit{converge.}$$

Exemple 1.19 .

1• *La série* $\sum\limits_{k\geq 1} |\frac{\cos k}{k^2}|$ *est convergente, car* $|\frac{\cos k}{k^2}| \leq \frac{1}{k^2}$ *et la série* $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$, $\alpha = 2 > 1$ *d'aprés Riemann converge. A lors la série* $\sum\limits_{k\geq 1} \frac{\cos k}{k^2}$ *converge.*

2• *La série harmonique alternée* $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k}$ *n'est pas absolument convergente. Car la série* $\sum\limits_{k\geq 0} |\frac{(-1)^k}{k}| = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{k}$ *est divergente.*

Définition 1.6 *Une série* $\sum u_k$ *qui est convergente, mais pas absolument convergente, s'appelle une série* ***semi-convergente****.*

Exemple 1.20 .

La série $\sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k}$ *est semi-convergente.*

Remarque 1.5 .

1• *Toute série à termes positifs convergente est* ***absolument convergente.***

2• *Les séries* ***alternées*** *sont des cas particulier des séries à termes de* ***signe quelconque****, donc le critère de* ***convergence absolue*** *s'applique*

aussi pour ces séries ***alternées****.*

3• *On a vu que si une série est absolument convergente, elles est forcément convergente, par conséquent l'étude d'une série de signe quelconque se ramène par le critère de convergence absolue à l'étude d'une série à termes positifs pour laquelle les critères de comparaison, de D'Alembert et de Cauchy sont applicables.*

CHAPITRE 2
Intégrales impropres

En première année, on a étudier l'intégrale des fonctions définies et continues sur un intervalle compact (fermé borné) $[a,b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$, il existait une fonction F dite primitive de f telle que :

$$F^{'}(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b] \text{ et } \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Ce qui représente l'aire délimité par le graphe de la fonction f sur $[a,b]$.

Dans ce chapitre, nous allons apprendre à calculer les intégrales de domaines non bornés, soit parce que l'intervalle d'intégration est infini (allant jusqu'à $+\infty$ ou $-\infty$), soit parce que la fonction à intégrer tend vers l'infini aux bornes de l'intervalle. Ces intégrales sont appelées intégrales **impropres** ou intégrales **généralisées**.

On termine notre introduction en expliquant le plan de ce chapitre. Lorsque l'on ne sait pas calculer une primitive, on a recours à deux types de méthode : soit la fonction est de **signe constant** au voisinage du point incertain, soit elle **change de signe** une infinité de fois dans ce voisinage (on dit alors qu'elle « **oscille** »). Nous distinguerons aussi le cas où le point incertain est $\pm\infty$ ou bien une valeur finie. Il y a donc quatre cas distincts, selon le type du point incertain, et le signe, constant ou non, de la fonction à intégrer. Ces quatre types sont schématisés dans les figures suivantes :

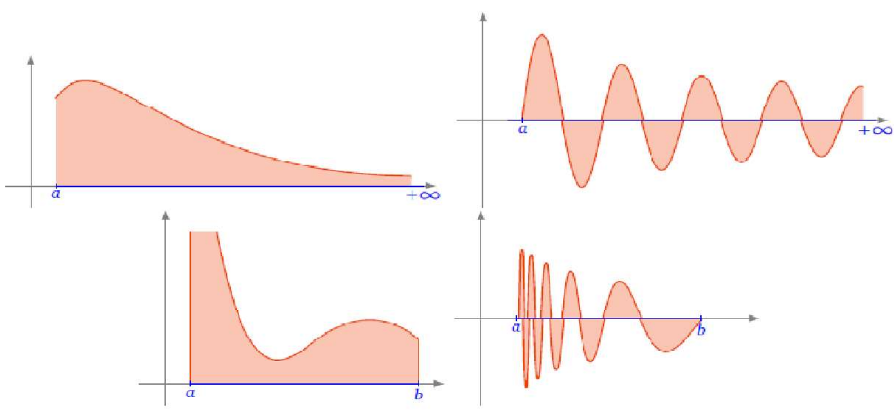

FIG. 2.1 – *Différents types d'intégrales.*

2.1 Définitions et propriétés

2.1.1 Points incertains

• On commence d'abord par identifier les **points incertains**, soit $+\infty$, soit $-\infty$ d'une part, et d'autre part le ou les points au voisinage desquels la fonction n'est pas bornée.

• On découpe ensuite chaque intervalle d'intégration en autant d'intervalles qu'il faut pour que chacun d'eux ne contienne qu'**un seul point incertain**, placé à l'une des deux bornes.

• l'intégrale sur l'intervalle complet est la somme des intégrales sur les intervalles du découpage.

• Le seul but est d'isoler les difficultés : les choix des points de découpage sont arbitraires.

2.1.2 Convergence/divergence

Définition 2.1 .

⋆ *Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$* ***converge*** *si la limite, lorsque $x \to +\infty$, de la primitive $\int_a^x f(t)\,dt$ existe et est finie, c-à-d*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Sinon, on dit que l'intégrale ***diverge****.*

⋆ *Soit f une fonction continue sur $]a,b]$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$* ***converge*** *si la limite à droite, lorsque $x \to a$, de la primitive $\int_x^b f(t)\,dt$ existe et est finie, c-à-d*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,dt.$$

Sinon, on dit que l'intégrale ***diverge****.*

Exemple 2.1 .

1− *L'intégrale* $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1$. *Donc l'intégrale converge.*

2− *L'intégrale* $\int_0^{+\infty} \sin(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \sin(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} [-\cos(t)]_0^x = \nexists$ *car* $\lim_{x\to+\infty} \cos(x) = \nexists$. *Donc l'intégrale diverge.*

3− *L'intégrale* $\int_0^1 \ln(t)\,dt = \lim_{x\to 0}\int_x^1 \ln(t)\,dt = \lim_{x\to 0}[t\ln(t)-t]_x^1 = -1$. *Donc l'intégrale converge.*

4− *L'intégrale* $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0}[\ln(t)]_x^1 = +\infty$. *Donc l'intégrale diverge.*

Remarque 2.1 .

• *L'intégrale généralisée, est considéré comme limite d'une intégrale définie.*

• *Convergence équivaut donc à limite finie. Divergence signifie soit qu'il n'y a pas de limite, soit que la limite est infinie.*

2.1.3 Relation de Chasles

Proposition 2.1 *(Relation de Chasles)*

Soit $f : [a,+\infty[\to\mathbb{R}$ *une fonction continue. Pour tout* $c\in[a,+\infty[$ *les intégrales impropres* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *et* $\int_c^{+\infty} f(t)\,dt$ *sont de même nature, et on a dans le cas de convergence :*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_a^{c} f(t)\,dt + \int_c^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Preuve. En utilisant la relation de Chasles pour les intégrales de Riemann usuelles, avec $a\le c\le x$:

$$\int_a^{x} f(t)\,dt = \int_a^{c} f(t)\,dt + \int_c^{x} f(t)\,dt.$$

Puis en passant à la limite $x\to+\infty$.

Maintenant, si on est dans le cas d'une fonction continue $f :]a,b]\to\mathbb{R}$, $c\in]a,b]$, alors on a un résultat similaire, et en cas de convergence :

$$\int_x^{b} f(t)\,dt = \int_x^{c} f(t)\,dt + \int_c^{b} f(t)\,dt.$$

Puis en passant à la limite $x\to a^+$. ■

Remarque 2.2 .

⋆ *« Être de même nature » signifie que les deux intégrales sont convergentes en même temps ou bien divergentes en même temps.*

⋆ *La relation de Chasles implique donc que la convergence ne dépend pas du comportement de la fonction sur des intervalles bornés, mais seulement de son comportement au voisinage de* $+\infty$.

2.1.4 Linéarité

Proposition 2.2 *(Linéarité de l'intégrale impropre)*
Soient f *et* g *deux fonctions continues sur* $[a,+\infty[$, *et* λ,μ *deux réels. Si les intégrales* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *et* $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *convergent, alors* $\int_a^{+\infty} \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,dt$ *converge et on a :*

$$\int_a^{+\infty} \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t)\,dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

La relation de linéarité est valable pour les fonctions d'un intervalle $]a,b]$, *non bornées en* a.

Remarque 2.3 *La réciproque dans la relation de linéarité est fausse, on peut trouver deux fonctions* f,g *telles que* $\int_a^{+\infty} f(t)+g(t)\,dt$ *converge, sans que* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$, *ni* $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *convergent.*

2.1.5 Positivité

Proposition 2.3 *(Positivité de l'intégrale impropre)*
Soient $f,g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *des fonctions continues, ayant une intégrale convergente.*

$$\text{Si } f \leq g \quad \text{alors} \quad \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)\,dt.$$

En particulier, on a aussi :

$$\text{Si } f \geq 0 \quad \text{alors} \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \geq 0.$$

La relation de positivité est valable pour les fonctions d'un intervalle $]a,b]$, *non bornées en* a.

Remarque 2.4 *Si l'on ne souhaite pas distinguer les deux types d'intégrales impropres sur un intervalle* $[a,+\infty[$ *(ou* $]-\infty,b]$*) d'une part et* $]a,b]$ *(ou* $[a,b[$*) d'autre part, alors il est pratique de rajouter les deux extrémités à la droite numérique :*

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}.$$

Ainsi l'intervalle $[a,b[$ *avec* $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \bar{\mathbb{R}}$ *désigne l'intervalle infini* $[a,+\infty[$ *(si* $b=+\infty$*) ou l'intervalle fini* $[a,b[$ *(si* $b<+\infty$*). De même pour l'intervalle* $]a,b]$ *avec* $a=-\infty$ *ou* $a \in \mathbb{R}$.

2.1.6 Critère de Cauchy

Théorème 2.1 *(Critère de Cauchy)*

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue. L'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge ssi*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists M \geq a \qquad u, v \geq M \Longrightarrow \; |\int_u^v f(t)\,dt| < \varepsilon.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le critère de Cauchy pour les limites à la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Soit $F : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ existe et est finie ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists M \geq a \qquad u, v \geq M \Longrightarrow \; |F(u) - F(v)| = |\int_u^v f(t)\,dt| < \varepsilon.$$

■

2.1.7 Cas de deux points incertains

lorsque les deux extrémités de l'intervalle de définition sont des points incertains. Il s'agit juste de se ramener à deux intégrales ayant chacune un seul point incertain.

Définition 2.2 *Soient* $a, b \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *avec* $a < b$*. Soit* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On dit que l'intégrale* $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge s'il existe* $c \in]a, b[$ *tel que les deux*

intégrales impropres $\int_a^c f(t)\,dt$ *et* $\int_c^b f(t)\,dt$ *convergent. La valeur de cette intégrale doublement impropre est alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Remarque 2.5 .

⋆ *Les relations de Chasles impliquent que la nature et la valeur de cette intégrale doublement impropre ne dépendent pas du choix de* c*, avec* $a < c < b$*.*

⋆ *Si une des deux intégrales* $\int_a^c f(t)\,dt$ *ou bien* $\int_c^b f(t)\,dt$ *diverge, alors* $\int_a^b f(t)\,dt$ *diverge.*

Exemple 2.2 .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2} dt = \int_{-\infty}^{2} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2} dt + \int_{2}^{+\infty} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2} dt.$$

On choisit $c = 2$ *au hasard.*
On commence par la première intégrale

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2} dt = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{2} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2} dt.$$

$$\int_{x}^{2} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2} dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]_x^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{1+x^2}\right).$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2} dt = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{2} \frac{t}{\left(1+t^2\right)^2} dt = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{10}.$$

Donc $\int_{-\infty}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ *converge.*
De même pour $\int_{2}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ *qui converge vers* $\frac{1}{10}$.
Ainsi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ *converge et vaut* 0.

2.2 Intégrales impropres sur un intervalle non borné

2.2.1 Fonctions positives

Nous supposerons que la fonction est positive ou nulle sur l'intervalle d'intégration $[a, +\infty[$. Les critères de convergence pour les fonctions positives sont aussi valables pour les

fonctions négatives, il suffit juste de remplacer f par $-f$.
Rappelons que, par définition,

$$\int_{a}^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{a}^{x} f(t)\, dt.$$

Comme f est positive, alors la primitive est croissante, ou bien $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\, dt$ est bornée, et donc l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, ou bien $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\, dt$ tend vers $+\infty$ donc diverge.

Si on ne peut pas (ou si on ne veut pas) calculer une primitive de f, on étudie la convergence par des critères qui nous permettent d'en déduire la nature sans les calculer explicitement.

2.2.1.1 Théorème de comparaison

Théorème 2.2 *(Critère de comparaison)*

Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $[a,+\infty[$. telles que :

$$\exists A \geq a, \quad \forall t > A \qquad f(t) \leq g(t).$$

1. *Si* $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *converge* $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge.*
2. *Si* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *diverge* $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *diverge.*

Preuve. La convergence des intégrales ne dépend pas de la borne de gauche de l'intervalle, et nous pouvons nous contenter d'étudier $\int_A^x f(t)\,dt$ et $\int_A^x g(t)\,dt$. Or en utilisant la

positivité de l'intégrale, on obtient que, pour tout $x \geq A$,

$$\int_A^x f(t)\,dt \leq \int_A^x g(t)\,dt.$$

Si $\int_A^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est une fonction croissante et majorée donc converge. Inversement, si $\int_A^{+\infty} f(t)\,dt$ tend vers $+\infty$, alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ tend vers $+\infty$ aussi. ■

Exemple 2.3 .

L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ *est convergente car :* $\forall t \in [1,+\infty[, \quad -t^2 \leq -t$, *comme* e^t *est une fonction croissante alors* $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. *Et comme* $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_1^x = e^{-1}$, *donc l'intégrale* $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ *converge.*

2.2.1.2 Critère d'équivalence

Théorème 2.3 *(Critère d'équivalence)*

Soient f et g deux fonctions strictement positives et continues sur $[a,+\infty[$. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=1.$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si est seulement si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

Preuve. Dire que deux fonctions sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est dire que leur rapport tend vers 1, ou encore :

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists A>a\quad\forall t>A\qquad |\frac{f(t)}{g(t)}-1|<\varepsilon,$$

soit encore :

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists A>a\quad\forall t>A\qquad (1-\varepsilon)\,g(t)<f(t)<(1+\varepsilon)\,g(t).$$

Fixons $\varepsilon<1$, et appliquons le théorème de comparaison sur l'intervalle $[A,+\infty[$. Si l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors l'intégrale $\int_A^{+\infty}(1-\varepsilon)\,g(t)\,dt$ converge, donc l'intégrale $\int_A^{+\infty} g(t)\,dt$ converge aussi par linéarité.

Inversement, si $\int_A^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_A^{+\infty}(1+\varepsilon)\,g(t)\,dt$ diverge, donc $\int_A^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge aussi. ■

Exemple 2.4 .

L'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge car :

$\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{t^2}}=1 \implies \frac{1}{1+t^2}\sim\frac{1}{t^2}$ *et comme* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\int_1^{x}\frac{1}{t^2}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x=1$, *alors l'intégrale* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ *converge par le critère d'équivalence l'intégrale* $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt$ *converge.*

Proposition 2.4 *Soient f et g deux fonctions strictement positives et continues sur $[a,+\infty[$ telles que:*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=l.$$

- *Si $l\neq 0$ et $l\neq+\infty$, $f(t)\underset{+\infty}{\sim} l.g(t)$. Alors les deux intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ sont de même nature.*

- *Si* $l = 0$, $f(t) \leq g(t)$. *Alors si l'intégrale* $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *converge* $\Longrightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge.*
- *Si* $l = +\infty$, $f(t) \geq g(t)$. *Alors si l'intégrale* $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ *diverge* $\Longrightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *diverge.*

Exemple 2.5 .

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ *converge car :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{\ln(t)}{1+t^2}}{\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}} = 0.$$

donc $\frac{\ln(t)}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$, *et comme* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-2}{\sqrt{t}}\right)_1^x = 2$ *converge* $\Longrightarrow$ $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ *converge.*

2.2.1.3 Intégrales de Riemann

Une intégrale de **Riemann** est une intégrale qui s'écrit sous la forme :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

Dans ce cas, la primitive est explicite :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} [\ln(t)]_1^x & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Donc on deduit la nature des intégrales de **Riemann**

$$\text{Si} \quad \alpha > 1 \quad \text{alors} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \quad \text{converge.}$$

$$\text{Si} \quad \alpha \leq 1 \quad \text{alors} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt \quad \text{diverge.}$$

Proposition 2.5 *Soit f une fonction positive et continue sur* $[a, +\infty[$.

- ⋆ *Si* $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{l}{t^\alpha}$ *où* $(l \neq 0$ *et* $l \neq +\infty)$ *alors* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \begin{cases} \textit{converge si } \alpha > 1 \\ \textit{diverge si } \alpha \leq 1 \end{cases}$.
- ⋆ *Si* $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ *alors* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge si* $\alpha > 1$.
- ⋆ *Si* $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ *alors* $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *diverge si* $\alpha \leq 1$.

Exemple 2.6 .

Soit $\int_{1}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2} dt$. *La fonction* $\frac{|\sin t|}{t^2}$ *est continue et positive sur* $[1,+\infty[$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}} \frac{|\sin t|}{t^2} = 0,$$

donc $\int_{1}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2} dt$ *converge car* $\alpha = \frac{3}{2}$.

2.2.1.4 Intégrale de Bertrand

Une Intégrale de **Bertrand** est une intégrale de la forme :

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha} (\ln t)^{\beta}} dt, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}_{+}^{*},\ \beta \in \mathbb{R}.$$

⋆ Si $\alpha > 1$, l'intégrale converge.
⋆ Si $\alpha < 1$, l'intégrale diverge.
⋆ Si $\alpha > 1$, l'intégrale converge.
⋆ Si $\alpha = 1$ et $\begin{cases} \beta > 1, \text{ l'intégrale converge} \\ \beta \leq 1, \text{ l'intégrale diverge} \end{cases}$.

Exemple 2.7 *Soit* $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$. *La fonction* $\frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ *est continue et positive sur* $[1,+\infty[$

$$\frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2},$$

et comme $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *est de Riemann* $\alpha = 2 > 1$ *donc converge par équivalence l'intégrale* $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ *converge.*

Exemple 2.8 *Soit* $\int_{2}^{+\infty} \sqrt{t^2+3t}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right) dt$. *La fonction* $\sqrt{t^2+3t}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right)$ *est continue et positive sur* $[2,+\infty[$

$$\sqrt{t^2+3t} = t\sqrt{1+\frac{3}{t}} \underset{+\infty}{\sim} t.$$

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t^2}.$$

$$\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\ln t}\right)^2.$$

Donc

$$\sqrt{t^2+3t}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t(\ln t)^2},$$

et comme $\int_2^{+\infty} -\frac{1}{2t(\ln t)^2}\,dt$ *est une intégrale de Bertrand* $\alpha = 1$, $\beta = 2$ *donc converge par équivalence l'intégrale* $\int_2^{+\infty} \sqrt{t^2+3t}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt$ *converge.*

2.2.2 Fonctions oscillantes

Nous considérons $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$, où $f(t)$ est une fonction oscillante jusqu'à l'infini entre des valeurs positives et négatives.

La définition de l'intégrale impropre reste la même :

$$\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int\limits_a^{x} f(t)\,dt.$$

Contrairement au cas des fonctions positives, où la limite était soit finie, soit égale à $+\infty$, tous les comportements sont possibles ici : les valeurs de $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ peuvent tendre vers une limite finie, vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou bien encore osciller entre deux valeurs finies, ou s'approcher alternativement de $+\infty$ et $-\infty$.

2.2.2.1 Critères de convergence pour les fonctions oscillantes

Définition 2.3 *(**Intégrale absolument convergente**)*

*Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$. on dit que $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale impropre $\int\limits_a^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge.*

Théorème 2.4 .

*Toute intégrale impropre **absolument convergente** est **convergente.** Autrement dit, être **absolument convergente** est plus fort qu'être convergente.*

Exemple 2.9 .

1− *Soit $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$, la fonction $\frac{\sin t}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$.*

Pour tout t,

$$\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \le \frac{1}{t^2}.$$

Or l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ est une intégrale de Riemann $\alpha = 2 > 1$ donc convergente par comparaison $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\,dt$ converge $\Longrightarrow$ l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ est absolument convergente.

Définition 2.4 *(**Intégrale semi-convergente**)*

*L'intégrale impropre $\int\limits_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est **semi-convergente** si elle est convergente mais pas absolument convergente.*

Exemple 2.10 .

Soit l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, *la fonction* $\frac{\sin t}{t}$ *est continue sur* $[1,+\infty[$.

Nous allons prouver qu'elle est convergente, mais pas absolument convergente.

1− *Pour montrer que l'intégrale est convergente, effectuons une intégration par parties, avec* $\begin{cases} u' = \sin t, & u = -\cos t \\ v = \frac{1}{t}, & v' = -\frac{1}{t^2} \end{cases}$:

$$\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x - \int\limits_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-\cos x}{x} + \cos 1 = \cos 1$. *Donc admet une limite finie.*
- *Pour l'autre terme,* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt$.

$$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *est une intégrale de Riemann* $\alpha = 2 > 1$ *donc convergente par comparaison* $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt$ *converge* $\Longrightarrow$ *l'intégrale* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ *est absolument convergente. Donc* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *converge.*

2− *Pour tout* t, $0 \leq |\sin t| \leq 1$, *on a :*

$$\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}.$$

En effectuons une intégration par parties à $\frac{\cos(2t)}{2t}$, *avec* $\begin{cases} u' = \cos 2t, & u = \frac{1}{2}\sin 2t \\ v = \frac{1}{t}, & v' = -\frac{1}{t^2} \end{cases}$ *,on obtient :*

$$\int\limits_1^x \frac{1-\cos(2t)}{2t} dt = \frac{1}{2}[\ln t]_1^x - \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 2t}{t}\right]_1^x - \frac{1}{4}\int\limits_1^x \frac{\sin 2t}{t^2} dt.$$

Les deux derniers convergent, et le premier tend vers $+\infty$. *Donc l'intégrale* $\int\limits_1^x \frac{1-\cos(2t)}{2t} dt$ *diverge par comparaison* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ *diverge aussi donc* $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ *n'est pas absolument convergente.*

Théorème 2.5 *(Théorème d'Abel)*

Soit f une fonction $\mathbf{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, positive, décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$. Soit g une fonction continue sur $[a,+\infty[$, telle qu'il existe $M>0$, $\forall x \in [a,+\infty[$,

$$\left|\int_a^x g(t)\,dt\right| \leq M.$$

Alors, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt$ converge.

Exemple 2.11 .

1− *Avec $f(t)=\frac{1}{t}$ et $g(t)=\sin t$, on retrouve que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge.*

2− *Avec $f(t)=\frac{1}{t^3}$ et $g(t)=\cos(t)\sin^3(t)$, on retrouve que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)\sin^3(t)}{t^3}dt$ converge.*

2.3 Intégrales impropres sur un intervalle borné

Nous traitons ici le cas où la fonction à intégrer tend vers l'infini en l'une des bornes de l'intervalle d'intégration. Le traitement est tout à fait analogue au cas d'une fonction positive sur un intervalle non borné et l'on omettra les démonstrations.

2.3.1 Fonctions positives

Nous supposerons que la fonction est positive ou nulle sur l'intervalle d'intégration $]a,b]$, et tend vers $+\infty$ en a. Rappelons que, par définition,

$$\int_{\to a}^{b} f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,dt.$$

Comme f est positive, alors la primitive est croissante quand x décroît vers a : soit $\int_x^b f(t)\,dt$ est bornée, et l'intégrale $\int_{\to a}^{b} f(t)\,dt$ est convergente, soit $\int_x^b f(t)\,dt$ tend vers $+\infty$.

2.3.1.1 Théorème de comparaison

Théorème 2.6 *(Théorème de comparaison)*

Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $]a,b]$. Supposons que f soit majorée par g au voisinage de a, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon>0,\quad \forall t\in\,]a,a+\varepsilon], \qquad f(t)\leq g(t).$$

1− *Si* $\int_a^b g(t)\,dt$ *converge* $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge.*

2− *Si* $\int_a^b f(t)\,dt$ *diverge* $\Longrightarrow$ $\int_a^b g(t)\,dt$ *diverge.*

Exemple 2.12 .

Soit l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)}\,dt$, *la fonction* $\frac{1}{\sin(t)}$ *est positive et continue sur* $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\forall t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \sin t \leq t \Longrightarrow \frac{1}{\sin t} \geq \frac{1}{t} > 0,$$

l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}\,dt$ *est divergente par comparaison* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)}\,dt$ *diverge.*

2.3.1.2 Théorème d'équivalence

Théorème 2.7 *(Théorème d'équivalence)*

Soient f et g deux fonctions strictement positives et continues sur $]a,b]$. *Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de a, c'est-à-dire :*

$$\lim_{t\to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge si et seulement si* $\int_a^b g(t)\,dt$ *converge.*

Exemple 2.13 .

Soit l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$

En effet,

$$\frac{e^{-t}}{t} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t},$$

Or $\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt$ *diverge donc* $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ *diverge.*

Proposition 2.6 *Soient f et g deux fonctions strictement positives et continues sur* $]a,b]$ *telles que:*

$$\lim_{t\to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = l.$$

• *Si* $l \neq 0$ *et* $l \neq +\infty$, $f(t) \underset{a^+}{\sim} l.g(t)$. *Alors les deux intégrales* $\int_a^b f(t)\,dt$ *et* $\int_a^b g(t)\,dt$ *sont de même nature.*

- *Si* $l=0$, $f(t)\leq g(t)$. *Alors si l'intégrale* $\int_a^b g(t)\,dt$ *converge* $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge.*
- *Si* $l=+\infty$, $f(t)\geq g(t)$. *Alors si l'intégrale* $\int_a^b g(t)\,dt$ *diverge* $\Longrightarrow$ $\int_a^b f(t)\,dt$ *diverge.*

Exemple 2.14 .

1- L'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(\ln t)^3}\,dt$ *converge car: la fonction* $\frac{1}{t(\ln t)^2}$ *est continue et positive sur* $\left]0,\frac{1}{2}\right]$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(\ln t)^3}\,dt = \lim_{x\to 0^+}\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(\ln t)^3}\,dt = \lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(\ln t)^2}\right]_x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(\ln\frac{1}{2})^2}+-\frac{1}{2}\frac{1}{(\ln x)^2}\right] = -\frac{1}{2}\frac{1}{(\ln\frac{1}{2})^2}$

Donc l'intégrale impropre $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt$ *converge.*

2- L'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ *converge car: la fonction* $\frac{\ln t}{1+t^2}$ *est continue et negative sur* $]0,1]$

$\frac{\ln t}{1+t^2}\underset{0^+}{\sim}\ln t$ *et l'intégrale de* $\int_0^1 \ln t\,dt$ *converge par équivalence l'intégrale* $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ *converge.*

3- L'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$ *converge car: la fonction* $\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ *est continue et negative sur* $]0,1]$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{\ln t}{\sqrt{t}}}{\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}}=0$$

Les fonctions $-\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ *et* $\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$ *étant continues et positive sur* $]0,1]$.

$$-\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\leq\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

Comme $\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\,dt$ *converge Riemann* $\alpha=\frac{3}{4}<1$ *par comparaison* $\int_0^1 -\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$ *converge, donc* $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$ *converge.*

2.3.1.3 Intégrale de Riemann

Une intégrale de ***Riemann*** *est une intégrale qui s'écrit sous la forme :*

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt,\ \text{où } \alpha\in\mathbb{R}_+^*.$$

Donc on deduit la nature des intégrales de ***Riemann***

$$\text{Si} \quad \alpha \quad < \quad 1 \quad \text{alors} \quad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{converge.}$$

$$\text{Si} \quad \alpha \quad \geq \quad 1 \quad \text{alors} \quad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{diverge.}$$

Proposition 2.7 *Soit f une fonction positive et continue sur* $]a,b]$.

★ *Si* $f(t) \underset{a^+}{\sim} \frac{l}{(t-a)^\alpha}$ *où* $(l \neq 0$ *et* $l \neq +\infty)$ *alors* $\int_a^b f(t)\,dt \begin{cases} \text{converge si } \alpha < 1 \\ \text{diverge si } \alpha \geq 1 \end{cases}$.

★ *Si* $\lim\limits_{t \to a^+} (t-a)^\alpha f(t) = 0$ *alors* $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge si* $\alpha < 1$.

★ *Si* $\lim\limits_{t \to a^+} (t-a)^\alpha f(t) = +\infty$ *alors* $\int_a^b f(t)\,dt$ *diverge si* $\alpha \geq 1$.

De même si b est un point impropre, on remplace $(t-a)$ *par* $(b-t)$.

Exemple 2.15 *L'intégrale* $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^{\frac{3}{4}}} dt$ *converge car: la fonction* $\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ *est continue sur* $]0,1]$

$$\lim_{x \to 0^+} t^\alpha \frac{\ln t}{t^{\frac{3}{4}}} = \lim_{x \to 0^+} t^{\alpha - \frac{3}{4}} \ln t = 0.$$

On choisit donc $\alpha \in \left]\frac{3}{4}, 1\right[$ *par exemple* $\alpha = \frac{4}{5}$ *pour que* $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^{\frac{3}{4}}} dt$ *converge.*

2.3.2 Fonctions oscillantes

Le dernier cas à traiter est celui où la fonction à intégrer oscille au voisinage d'une des bornes, prenant des valeurs arbitrairement proches de $+\infty$ *ou* $-\infty$.

Le changement de variable $u = \frac{1}{t-a}$ *permet de se ramener au cas précédent d'une fonction oscillante sur un intervalle non borné, ce qui nous dispensera de donner autant de détails.*

Rappelons que, par définition,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt.$$

2.3.2.1 Critères de convergence pour les fonctions oscillantes

Définition 2.5 *(**Convergence absolue**)*

Soit f une fonction continue sur $]a,b]$. *On dit que* $\int_a^b f(t)\,dt$ *est* ***absolument convergente*** *si* $\int_a^b |f(t)|\,dt$ *est une intégrale convergente.*

Théorème 2.8 *Si l'intégrale* $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ *est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Exemple 2.16 .

Soit l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{t}}{\sqrt{t}}\,dt$, *La fonction* $\frac{\sin\frac{1}{t}}{\sqrt{t}}$ *est continue* $]0,1]$.

Pour tout $t \in]0,1]$, *on a*

$$\frac{|\sin\frac{1}{t}|}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Or l'intégrale $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ *est convergente d'aprés Riemann* $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ *par comparaison* $\int\limits_0^1 \frac{|\sin\frac{1}{t}|}{\sqrt{t}}\,dt$ *converge, donc l'intégrale* $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{t}}{\sqrt{t}}\,dt$ *est absolument convergente.*

2.4 Intégration par parties

Théorème 2.9 *(**Intégration par parties**)*

Soient u *et* v *deux fonctions de classe* C^1 *sur l'intervalle* $[a,+\infty[$. *Supposons que* $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)\,v(t)$ *existe et soit finie. Alors les intégrales* $\int\limits_a^{+\infty} u(t)\,v'(t)\,dt$ *et* $\int\limits_a^{+\infty} u'(t)\,v(t)\,dt$ *sont de*

même nature. En cas de convergence on a :

$$\int\limits_a^{+\infty} u(t)\,v'(t)\,dt = \left[\lim_{x\to+\infty} u(t)\,v(t) - u(a)\,v(a)\right] - \int\limits_a^{+\infty} u'(t)\,v(t)\,dt.$$

Preuve. *C'est la formule usuelle d'intégration par parties*

$$\int\limits_a^{x} u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^x - \int\limits_a^{x} u'(t)\,v(t)\,dt.$$

en notant que par hypothèse que $\lim\limits_{x\to+\infty} uv$ *a une limite finie.* ■

Exemple 2.17 .

Soit l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t}\,dt$ *ou* $\lambda > 0$.

On effectue l'intégration par parties avec $u = \lambda t$, $v' = e^{-\lambda t}$. *On a donc* $u' = \lambda$, $v = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$.

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt &= \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-\lambda t} dt.\\ &= -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda x} - 1\right)\\ \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}, \text{ donc l'intégrale converge.}\end{aligned}$$

2.5 Changement de variable

Théorème 2.10** **(Changement de variable)

*Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a, +\infty[$. Soit $J = [\alpha, \beta[$ un intervalle avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ou $\beta = +\infty$. Soit $\varphi : J \to I$ un **difféomorphisme** de classe C^1. Les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt$ sont de même nature. En cas de convergence, on a :*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t)\,dt.$$

*On rappelle que $\varphi : J \to I$ un **difféomorphisme** de classe C^1 si φ est une application C^1, bijective, dont la bijection réciproque est aussi C^1.*

***Exemple 2.18** .*

L'exemple suivant est trés intéressant : la fonction $f(t) = \sin(t^2)$ a une intégrale convergente, mais ne tend pas vers 0 (quand $t \to +\infty$). C'est à mettre en opposition avec le cas des séries : pour une série convergente le terme général tend toujours vers 0.

Soit l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$

On effectue le changement de variable $u = t^2$, qui donne $t = \sqrt{u}$, $dt = \frac{1}{2\sqrt{u}}du$ avec φ est un difféomorphisme

$$\varphi : [1, x^2] \to [1, x]$$

$$u \to t$$

$$\int_1^x \sin(t^2)\,dt = \int_1^{x^2} \sin(u)\frac{1}{2\sqrt{u}}du.$$

Or par le théorème d'Abel $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du$ *converge, donc* $\int\limits_{1}^{x^2} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du$ *admet une limite finie, ce qui prouve que* $\int\limits_{1}^{x} \sin\left(t^2\right) dt$ *admet aussi une limite finie. Alors* $\int\limits_{1}^{+\infty} \sin\left(t^2\right) dt$ *converge.*

Exemple 2.19 .

Soit l'intégrale $\int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t-1}$, *qui donne* $t = u^2 + 1$, $dt = 2udu$ *avec* φ *est un difféomorphisme*

$$\varphi : \left[\sqrt{x-1}, 1\right] \to [x, 2]$$
$$u \to t$$

$$\lim_{x\to 1} \int\limits_{x}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t-1}} = \lim_{x\to 1} \int\limits_{\sqrt{x-1}}^{1} 2du = 2\,[u]_{\sqrt{x-1}}^{1} = \lim_{x\to 1} 2\left(1 - \sqrt{x-1}\right) = 2.$$

$\int\limits_{0}^{1} 2du$ *converge, ce qui prouve que* $\int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$ *admet aussi une limite finie. Alors* $\int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{\sqrt{t-1}}$ *converge.*

Exemple 2.20 .

On va calculer la valeur des deux intégrales impropres suivantes :

$$I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt, \qquad J = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\, dt.$$

$\star$ *Montrer que l'intégrale I converge.*

Comme $\ln(\sin(t)) \underset{0^+}{\sim} \ln(t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$, *en effectuons une intégration par parties de* $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(t)\, dt$ *l'intégrale converge. Par équivalence* $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt$ *converge.*

$\star$ *Vérifier que* $I = J$.

On effectuons le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$. *On a* $dt = -du$ *et un difféomorphisme entre* $t \in \left[x, \frac{\pi}{2}\right]$ *et* $u \in \left[\frac{\pi}{2} - x, 0\right]$. *Ainsi*

$$\begin{aligned}
\int\limits_{x}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}-x}^{0} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)(-du) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\cos(u))\, du. \\
I &= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt = \lim_{x\to 0^+} \int\limits_{x}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\, dt = \lim_{x\to 0^+} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\cos(u))\, du.
\end{aligned}$$

Cela prouve $I = J$. Donc J converge.
⋆ *Calculer $I + J$.*

$$\begin{aligned}
I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))\,dt. \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))\right) dt. \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t).\cos(t))\,dt. \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right) dt. \\
&= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,dt.
\end{aligned}$$

Et comme $I = J$, on a

$$2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + L.$$

Il nous reste à évaluer $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))\,dt$:
Effectuons le changement de variable $u = 2t$, l'intégrale L devient:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,du, \\
&= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u))\,du,
\end{aligned}$$

effectuons le changement de variable $v = \pi - u$, on aura

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(\pi - v))\,(-dv), \\
&= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(v))\,dv, \\
&= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}I = I.
\end{aligned}$$

Donc, comme $2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + L$ *et* $L = I$, *on trouve:*

$$I = J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

2.6 Application des intégrales impropres

2.6.1 Fonction Gamma

Théorème 2.11 *(**Fonction Gamma** Γ)*

On appelle fonction Gamma notée Γ *d'Euler l'application :*

$$\Gamma :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$

$$x \to \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ *converge pour tout x strictement positif.*

Preuve. *en effet :*

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = I_1 + I_2.$$

Si $x \geq 1$, 0 *n'est pas une impropre, donc* I_1 *converge et* $\lim_{t\to+\infty} t^2 t^{x-1}e^{-t} = 0$ *ce qui assure la convergence de* I_2.

Si $0 < x < 1$, *on a* $t^{x-1}e^{-t} \underset{0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$, $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}dt$ *est une intégrale de Riemann converge si* $1 - x < 1$, *pour tout* $x > 0$ *par équivalence* $I_1 = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ *converge, en plus* $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ *converge car* $\lim_{t\to+\infty} t^2 t^{x-1}e^{-t} = 0$. ■

Propriétés:

1• $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, *pour tout* $x > 0$. *En particulier* $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$.

2• *Pour tout* $x > 0$, $\Gamma(x+n+1) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)(x+n)\Gamma(x)$.

3• *Pour tout* $n > 0$, $\Gamma(n+1) = n!$.

4• $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2.6.2 Fonction Bêta

Théorème 2.12 *(**Fonction Bêta** β)*
Pour tout réels strictement positifs p et q, on définit la fonction Bêta d'Euler notée β par:

$$\beta\left(p,q\right)=\int_0^1 u^{p-1}\left(1-u\right)^{q-1}du.$$

$\beta\left(p,q\right)$ converge si $p>0$ et $q>0$.

Preuve. *En effet :*

$$\beta\left(p,q\right)=\int_0^1 u^{p-1}\left(1-u\right)^{q-1}du=\int_0^{\frac{1}{2}} u^{p-1}\left(1-u\right)^{q-1}du+\int_{\frac{1}{2}}^1 u^{p-1}\left(1-u\right)^{q-1}du.$$

Au voisinage de 0, $u^{p-1}\left(1-u\right)^{q-1}\sim\frac{1}{u^{1-p}}$, *donc* $\int_0^{\frac{1}{2}} u^{p-1}\left(1-u\right)^{q-1}du$ *converge pour* $p>0$.

Au voisinage de 1, $u^{p-1}\left(1-u\right)^{q-1}\sim\frac{1}{(1-u)^{1-q}}$, *donc* $\int_{\frac{1}{2}}^1 u^{p-1}\left(1-u\right)^{q-1}du$ *converge pour* $q>0$. ■

***Propriétés**:*
1• $\forall p,q>0,\ \beta\left(p,q\right)=\beta\left(q,p\right)$.
2• $\forall p,q>0,\ \beta\left(p,q\right)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.
3• $\forall p,q>0,\ \beta\left(p,q\right)=\int_0^{+\infty}\frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du$.
4• *Si* $p\notin\mathbb{Z}$, $\beta\left(p,1-p\right)=\Gamma\left(p\right)\Gamma\left(1-p\right)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$.

CHAPITRE 3
Fonctions de deux variables

La notion de fonctions à plusieurs variables apparait très tôt en physique où l'on étudie souvent des quantités dépendants de plusieurs autres, mais elle se développe considérablement à partir de la fin du 17*ème siècle. En* 1667*, James Gregory donne une des premières définitions formelles : « une fonction est une quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou par n'importe quelle opération imaginable ». Le 18ème siècle voit le développement du calcul infinitésimal et la recherche de solutions d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles. Les fonctions à plusieurs variables sont alors manipulées autant que les fonctions à une seule variable. Il faut attendre la fin du 19ème siècle et début du 20ème siècle pour voir s'établir avec plus de rigueur les calculs sur les dérivées partielles, notamment les dérivées secondes.*

Ce chapitre est consacré à l'étude des fonctions de plusieurs variables, c'est-à-dire définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$*, qu'on appellera son domaine de définition. On se limitera essentiellement aux fonctions de deux variables.*

Exemples de fonctions de deux variables utilisés dans les sciences de gestions

1- La fonction coût : *Si une entreprise produits s deux articles différents* x *articles au coût de 10 (en unité monétaire) par article et* y *articles au coût de 15 (en unité*

monétaire) par article, alors le coût total serai une fonction à deux variables indépendantes x, y *qui s'écrit :*

$$C\left(x,y\right) = 10x + 15y.$$

2- La fonction de production : *La quantité de production noté* Q *d'une entreprise est une fonction* P *qui est souvent exprimée en fonction de deux variables, le travail noté* T *et le capital*

noté C *:*

$$Q = P\,(T,C)\,.$$

En particulier la fonction de ***Cobb-Douglas*** *à deux variables :*

$$Q = P\,(T,C) = l\,T^{\alpha}C^{\beta},\ \ l,\alpha,\beta > 0.$$

3.1 Généralités sur les fonctions de deux variables

Rappel: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *est un espace vectoriel sur un corps* $K = \mathbb{R}$.

Soit X *un vecteur de* $\mathbb{R}^2$, $X = (x,y)$ *où* x *et* $y \in K$ *sont appelés les coordonnées où bien les composantes de* K. *l'espace vectoriel est muni des lois suivantes:*

$$\forall\ X_1 = (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall\ X_2 = (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ \\ \qquad \lambda X_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1). \end{cases}$$

Définition 3.1 .

On appelle fonction numérique de deux variables toute fonction définie par:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to f(x,y).$$

Exemple 3.1 $f(x,y) = 2xy + x^2 + y^2$.

3.1.1 Norme et distance sur $\mathbf{R}^2$

Définition 3.2 ***(Norme)***

Une application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est* ***une norme*** *si et seulement si :*

1− $\forall X \in \mathbb{R}^2, \quad N(X) \geq 0$. ***Positivité***

2− $\forall X \in \mathbb{R}^2, \quad N(X) = 0 \iff X = 0$.

3− $\forall X \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda X) = |\lambda|\, N(X)$. ***Homogénéité***

4 − $\forall X_1, X_2, \in \mathbb{R}^2, \quad N(X_1 + X_2) \leq N(X_1) + N(X_2)$. ***Inégalité triangulaire***

Notation: *On note* $N(X) = \|X\|_{\mathbb{R}^2}$.

Exemple 3.2 .

1) *Pour tout* $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad N_1(X) = \|X\|_1 = |x| + |y|$.

2) *Pour tout* $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad N_2(X) = \|X\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. ***La norme euclidienne***

3) *Pour tout* $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad N_3(X) = \|X\|_\infty = \max(|x|, |y|)$. ***La norme infinie***

Définition 3.3 ***(Normes équivalentes)***

Soit $\mathbb{R}^2$ *muni de deux normes* N *et* N'. *Ces deux normes sont dites* **équivalentes** *si et seulement* $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$ *tel que :*

$$\lambda_1 N'(X) \leq N(X) \leq \lambda_2 N'(X), \qquad \forall X \in \mathbb{R}^2.$$

Exemple 3.3 *Montrer que les normes* $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ *sont équivalentes sur* $\mathbb{R}^2$ *et on a :*

$$\|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \|X\|_1 \leq 2\|X\|_\infty, \quad \forall X = (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) On a : $N_2(X) = \|X\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow N_2^2(X) = x^2+y^2$..........(1)

$N_1(X) = \|X\|_1 = |x|+|y| \Longrightarrow N_1^2(X) = x^2+y^2+2|x||y|$........(2)

de (1) *et* (2) *en déduit que* $N_2^2(X) \leq N_1^2(X) \Longrightarrow \|X\|_2 \leq \|X\|_1$.

b) On a : $N_3(X) = \|X\|_\infty = \max(|x|,|y|) = \begin{cases} |x| & si\ |x| > |y| \\ |y| & si\ |x| < |y| \end{cases} \Longrightarrow N_3^2(X) = \begin{cases} x^2 & si\ |x| > |y| \\ y^2 & si\ |x| < |y| \end{cases}$ ....(3)

$N_2(X) = \|X\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \Longrightarrow N_2^2(X) = x^2+y^2$........(4)

de (3) *et* (4) *en déduit que* $N_3^2(X) \leq N_2^2(X) \Longrightarrow \|X\|_\infty \leq \|X\|_2$.

c) $N_3(X) = \|X\|_\infty = \max(|x|,|y|) = \begin{cases} |x| & si\ |x| > |y| \\ |y| & si\ |x| < |y| \end{cases} = \begin{cases} |x| & si\ |x| + |x| > |y| + |x| \\ |y| & si\ |y| + |y| > |x| + |y| \end{cases} =$

$\begin{cases} |x| & si\ 2N_3(X) > N_1(X) \\ |y| & si\ 2N_3(X) > N_1(X) \end{cases}. \Longrightarrow 2\|X\|_\infty \geq \|X\|_1$.

Donc $\|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \|X\|_1 \leq 2\|X\|_\infty, \quad \forall X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 3.4 **(*Distance associée à une norme*)**

Soit $\mathbb{R}^2$ *muni d'une norme* N, *, alors l'application* d *définie par :*

$$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$$

$$(X_1,X_2) \to d(X_1,X_2),$$

est appelée la ***distance associée à la norme*** N.

On appelle distance une l'application d *vérifiant :*

1) $\forall X_1,X_2 \in \mathbb{R}^2,\ d(X_1,X_2) \geq 0;$

2) $\forall X_1,X_2 \in \mathbb{R}^2,\ d(X_1,X_2) = 0 \Longleftrightarrow X_1 = X_2;$

3) $\forall X_1,X_2 \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ d(\lambda(X_1,X_2)) = |\lambda|\, d(X_1,X_2);$

4) $\forall X_1,X_2,X_1',X_2' \in \mathbb{R}^2,\ d\left((X_1,X_2) + \left(X_1',X_2'\right)\right) \leq d(X_1,X_2) + d\left(X_1',X_2'\right).$

Exemple 3.4 *Dans* $\mathbb{R}^2$ *on définie trois distances : soit* $X_1 = (x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$, $X_2 = (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$.

⋆ $d_1(X_1,X_2) = \|X_1 - X_2\|_1 = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

⋆ $d_2(X_1,X_2) = \|X_1 - X_2\|_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$.

⋆ $d_3(X_1,X_2) = d_\infty(X_1,X_2) = \|X_1 - X_2\|_\infty = \max(|x_1-x_2|, |y_1-y_2|)$.

Définition 3.5 ***(Distance non associée à une norme)***
Soit E un espace vectoriel sur un corps K. On dit qu'une application

$$d : E \times E \to \mathbb{R}_+$$

$$\left(x,y\right) \to d\left(x,y\right),$$

est une distance sur E si elle vérifie les trois axiomes suivants :
1) $\forall x,y \in E,\ d\left(x,y\right) = 0 \iff x = y;$
3) $\forall x,y \in E,\ d\left(x,y\right) = d\left(y,x\right);$
4) $\forall x,y,z \in E,\ d\left(x,z\right) \leq d\left(x,y\right) + d\left(y,z\right).$

3.1.2 Partie ouverte et partie fermée de $\mathbf{R}^2$

Définition 3.6 ***(Boules ouvertes et boules fermées de*** $\mathbb{R}^2$***)***
Soient $X_0 \in \mathbb{R}^2$, $R \in \mathbb{R}_+^*$.
$\star$ *On appelle* ***boule ouverte*** *de centre $X_0 = \left(x_0, y_0\right)$ et de rayon r l'ensemble noté $B_0\left(X_0,R\right)$*

$$B_0\left(X_0,R\right) = \left\{X \in \mathbb{R}^2 / \quad d\left(X,X_0\right) < R\right\}.$$

$\star$ *On appelle* ***boule fermée*** *de centre $X_0 = \left(x_0, y_0\right)$ et de rayon r l'ensemble noté $\bar{B}\left(X_0,R\right)$*

$$\bar{B}\left(X_0,R\right) = \left\{X \in \mathbb{R}^2 / \quad d\left(X,X_0\right) \leq R\right\}.$$

Exemple 3.5 .
1• *Dans* $(\mathbb{R}, |.|)$, *soient* $x_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ *alors :*

$$B_0\left(x_0,r\right) = \left]x_0 - r, x_0 + r\right[,$$

$$\bar{B}\left(x_0,r\right) = \left[x_0 - r, x_0 + r\right].$$

2• *Dans* $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_2\right)$, *soient* $X_0 = \left(x_0, y_0\right) \in \mathbb{R}^2$, $R \in \mathbb{R}_+^*$ *alors :*

$$B_0\left(X_0,R\right) = \left\{X = \left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2 / \quad \left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 < R^2\right\},$$

$$\bar{B}\left(X_0,R\right) = \left\{X = \left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2 / \quad \left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 \leq R^2\right\}.$$

3• *Dans* $\left(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty\right)$, *soient* $X_0 = \left(x_0, y_0\right) \in \mathbb{R}^2$, $R \in \mathbb{R}_+^*$ *alors :*

$$B_0\left(X_0,R\right) = \left\{X = \left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2 / \quad \max\left(|x - x_0|, |y - y_0|\right) < R\right\},$$

$$\bar{B}\left(X_0,R\right) = \left\{X = \left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2 / \quad \max\left(|x - x_0|, |y - y_0|\right) \leq R\right\}.$$

Définition 3.7 ***(Partie ouverte et partie fermée)***
• *On appelle partie ouverte $A \subset \mathbb{R}^2$ ssi*

$$\forall X \in A, \quad \exists R > 0 / \quad B_0\left(X,R\right) \subset A.$$

• *On appelle partie fermée si son compl´ementaire est un ouvert.*

3.1.3 Domaine de définition, image et représentation graphique

Définition 3.8 **(*Domaine de définition*)**

On appelle domaine de définition d'une fonction de deux variables, l'ensemble suivant :

$$D_f = \left\{ X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad f(x,y) \ \text{existe} \right\}.$$

Exemple 3.6 *Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes :*

1− $f_1(x,y) = \frac{x}{y}$,

$$D_{f_1} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad f_1(x,y) = \frac{x}{y} \ \text{existe} \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad y \neq 0 \right\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

2− $f_2(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

$$D_{f_2} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad f_2(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \ \text{existe} \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

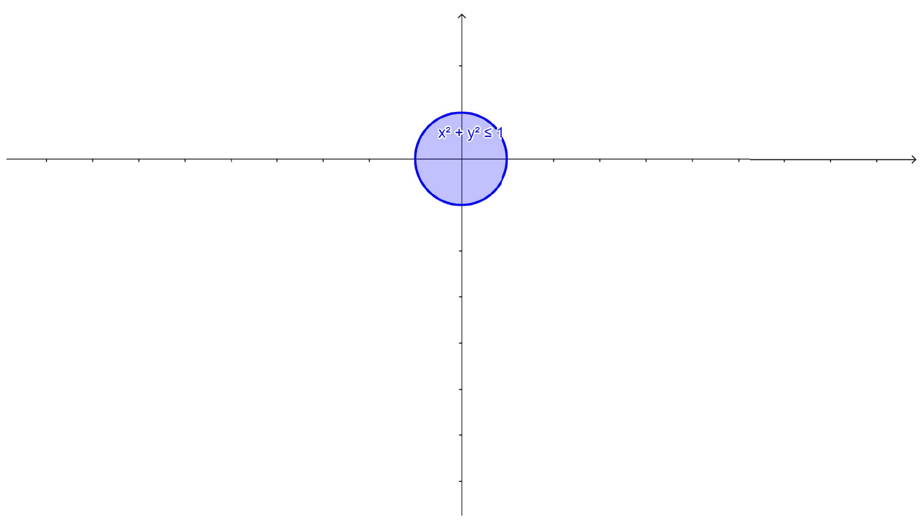

FIG. 3.1 – *Domaine de définition f_2.*

3− $f_3(x,y) = \sqrt{x+y}$,

$$D_{f_3} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad f_3(x,y) = \sqrt{x+y} \text{ existe}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad y \geq -x\right\}.$$

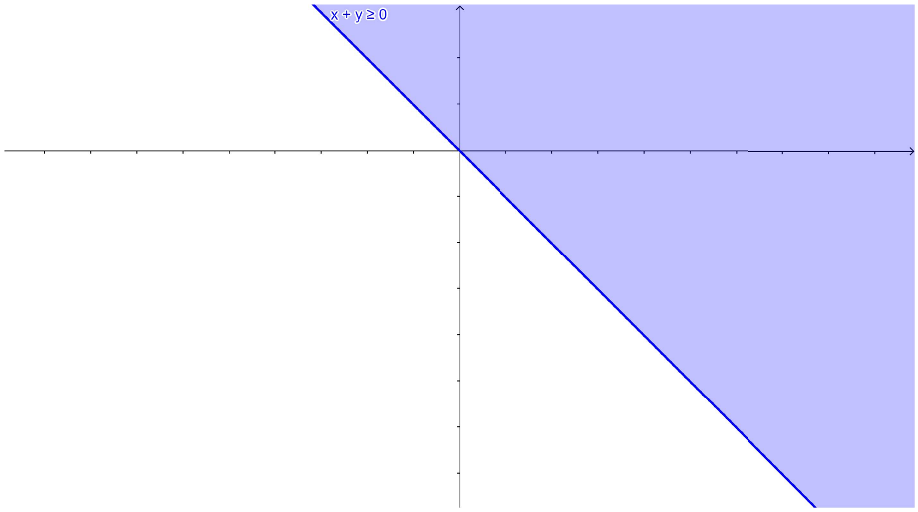

FIG. 3.2 – *Domaine de définition f_3.*

4− $f_4(x,y) = \ln(xy)$,

$$D_{f_4} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad f_4(x,y) = \ln(xy) \text{ existe}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad xy > 0\right\}.$$

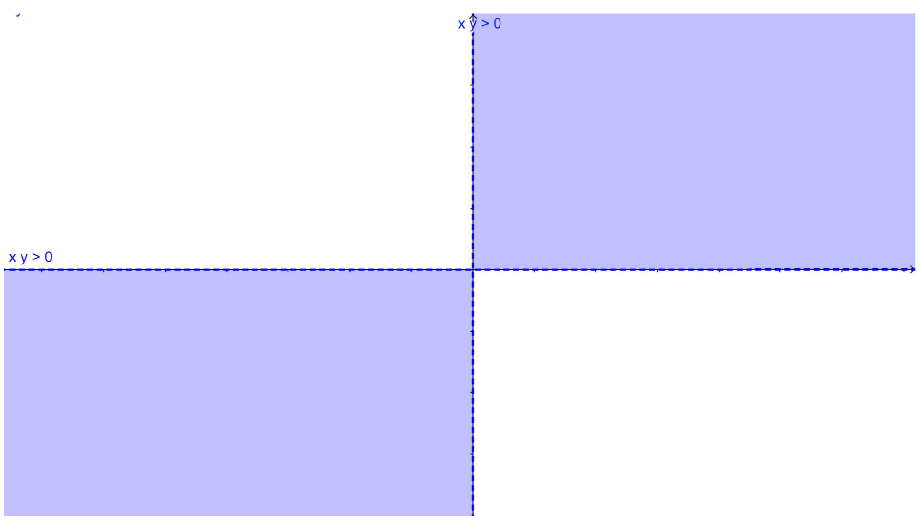

FIG. 3.3 – *Domaine de définition f_4.*

Définition 3.9 ***(Image)***

L'image par f de D_f est l'ensemble :

$$Im_f = f(D) = \{f(x,y) / \quad (x,y) \in D\} \subset \mathbb{R}.$$

3.1.4 Les courbes de niveau ou lignes de niveau

Définition 3.10 *La* ***représentation graphique*** *d'une fonction à deux variables dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de l'espace est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant $z = f(x,y)$.*

Remarque 3.1 *Une fonction à deux variables est donc représentée non pas par une courbe, mais par une surface dans l'espace. Il est très difficile en général de visualiser ce*

genre de représentations graphiques, c'est pourquoi on en est souvent réduit à étudier les coupes par des plans que représentent les lignes de niveau.

Définition 3.11 ***(Courbe de niveau)***

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$, où $D_f \subset \mathbb{R}^2$ et $k \in Im_f(D_f) \subset \mathbb{R}$. La courbe de niveau k de la fonction f est l'ensemble des couples (x,y) vérifiant $f(x,y) = k$.

Exemple 3.7 .

1− *Les courbes de niveau de la fonction f_1 définie par :*

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2,$$

sont des cercles de centre (0,0) *et de rayon $\sqrt{k}$ pour $k \geq 0$: $x^2 + y^2 = k$.*

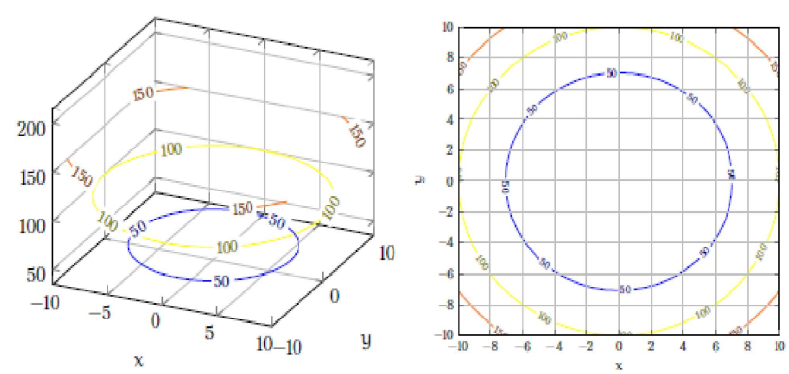

FIG. 3.4 – *Les courbes de niveau de la fonction f_1.*

2− *Les courbes de niveau de la fonction f_2 définie par :*

$$f_2(x,y) = x^2 - y^2,$$

pour $k = 0$ *ce sont les droites d'équations :*

$$x^2 - y^2 = 0 \iff |x| = |y|,$$

pour $k \neq 0$ *ce sont les paraboles :*

$$x^2 - y^2 = k \iff y^2 = x^2 - k.$$

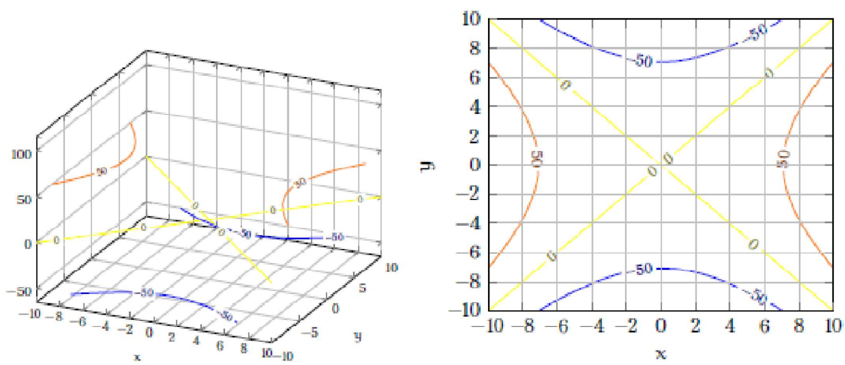

FIG. 3.5 – *Les courbes de niveau de la fonction* f_2.

3.2 Limite des fonctions de deux variables

Rappelons la définition de la notion de limite d'une fonction d'une variable réelle, c'est à dire :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 :\ \forall x, \quad 0 < |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Comment généraliser ces notions à une fonction de deux variables réelles : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Pour arriver à ce but, nous avons besoin d'abord, comme dans le cas d'une seule variable réelle, de définir les notions suivantes :

a) Comment définir la notion de voisinage V_η *du point* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *(comparativement à* $I_\eta = \left]x_0 - \eta, x_0 + \eta\right[$ *pour les fonctions d'une seule variable).*

b) Comment définir rigoureusement la notion (x, y) *s'approche de* (x_0, y_0).

c) Comment définir rigoureusement la notion $f(x, y)$ *s'approche de* l *quand* (x, y) *s'approche de* (x_0, y_0).

3.2.1 Notion de voisinage

Pour les fonctions d'une seule variable, nous avons défini le voisinage $V_\eta(x_0)$ *d'un point* $x_0 \in \mathbb{R}$, *comme étant l'intervalle de centre* x_0 *et de rayon* η, *c'est à dire*

$$V_\eta(x_0) = I_\eta = \left]x_0 - \eta, x_0 + \eta\right[= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \eta\}.$$

Si on remarque que $d_{\mathbb{R}}(x,x_0) = |x - x_0|$ *dans* $\mathbb{R}$*, alors on a*

$$V_\eta(x_0) = I_\eta = \left\{x \in \mathbb{R} : d_{\mathbb{R}}(x,x_0) < \eta\right\}.$$

En se basant sur la notion de voisinage d'une fonction d'une seule variable, on peut généraliser la notion de voisinage d'un point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ *en remplaçant la distance* $d_{\mathbb{R}}$ *par* $d_{\mathbb{R}^2}$

Définition 3.12 .
Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$*. Notons par* $V_\eta(x_0,y_0)$ *le sous ensemble de* $\mathbb{R}^2$ *suivant*

$$\begin{aligned} V_\eta(x_0,y_0) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_{\mathbb{R}^2}\left[(x,y),(x_0,y_0)\right] < \eta\right\}, \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \eta\right\}, \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \eta^2\right\}. \end{aligned}$$

$V_\eta(x_0,y_0)$ *s'appelle voisinage du point* (x_0,y_0) *de rayon* η *ou boule ouverte de centre* (x_0,y_0) *et de rayon* η*. Géométriquement, il représente l'intérieur du cercle de centre* (x_0,y_0) *et de rayon* η*.*

On peut prendre une autre distance $d^*_{\mathbb{R}^2}$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par*

$$d^*_{\mathbb{R}^2}\left[(x,y),(x_0,y_0)\right] = \max\left(|x-x_0|, |y-y_0|\right).$$

$$\begin{aligned} V_\eta(x_0,y_0) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d^*_{\mathbb{R}^2}\left[(x,y),(x_0,y_0)\right] < \eta\right\}, \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\left(|x-x_0|, |y-y_0|\right) < \eta\right\}, \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-x_0| < \eta \text{ et } |y-y_0| < \eta\right\}. \end{aligned}$$

3.2.2 Notion de limite

Définition 3.13 **(*La limite d'une fonction de deux variables*)**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie dans un voisinage* $V_\eta(x_0,y_0)$ *du point* $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ *(sauf peut être au point* (x_0,y_0)*) et* $l \in \mathbb{R}$*. On dit que* $f(x,y)$ *tend vers* l *quand* (x,y) *tend vers* (x_0,y_0) *et on note*

$$f(x,y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} l \text{ ou encore } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l.$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 :\ \forall (x,y),\quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \eta \Longrightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon.$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 :\ \forall (x,y),\quad \max\left(|x-x_0|, |y-y_0|\right) < \eta \Longrightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon.$$

Remarque 3.2 .

1− *Pour démontrer que* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$, *il faut se donner* $\varepsilon > 0$ *quelconque et trouver* $\eta > 0$ *qui dépend en général de* ε *et du point* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. *Les données dans ce problème sont* ε *et* (x_0, y_0), *l'inconnue c'est* η.

2− *Pour démontrer que* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$, *on peut utiliser la distance* $d_{\mathbb{R}^2}$ *ou bien* $d^*_{\mathbb{R}^2}$ *car Les distances sont équivalentes.*

Exemple 3.8 .

1− *Soit* $C \in \mathbb{R}$ *une constante quelconque et* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. *Considérons* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = C.$$

Démontrons en utilisant la définition de la limite, que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = C.$$

Soit $\varepsilon > 0$ *quelconque. Trouvons* $\eta > 0$ *tel que*

$$\forall (x,y), \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \eta \implies |f(x,y) - C| < \varepsilon.$$

Puisque $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x,y) = C$, *alors*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x,y) - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon.$$

On peut prendre n'importe quel η; *il conviendrait. Par exemple* $\eta = \varepsilon$ *ou* $\eta = 3$.

2− *Soit* $A, B \in \mathbb{R}$ *deux constantes. Considérons* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = Ax + By.$$

Démontrons en utilisant la définition de la limite, que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = Ax_0 + By_0.$$

Nous allons utiliser dans cet exercice la distance $d^*_{\mathbb{R}^2}$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *quelconque. Trouvons* $\eta > 0$ *tel que*

$$\forall (x,y), \quad si\ |x - x_0| < \eta \ et\ |y - y_0| < \eta \implies |f(x,y) - (Ax_0 + By_0)| < \varepsilon.$$

Remarquons que

$$|f(x,y) - Ax_0 + By_0| = |Ax + By - (Ax_0 + By_0)| = |A(x - x_0) + B(y - y_0)| \le |A|\,|(x - x_0)| + |B|\,|(y - y_0)|.$$

Par conséquent, si $|x - x_0| < \eta$ *et* $|y - y_0| < \eta$, *alors*

$$|Ax + By - (Ax_0 + By_0)| \le (|A| + |B|)\,\eta.$$

Maintenant comment choisir η en fonction de ε, de A et B, on peut voir que l'on peut choisir η tel que

$$(|A|+|B|)\,\eta=\varepsilon \text{ ou encore } \eta=\frac{\varepsilon}{|A|+|B|}.$$

Donc

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=Ax_0+By_0.$$

Ne pas confondre limite suivant une direction et limite

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=l$ *existe. Par définition lorsque* (x,y) *tend vers* (x_0,y_0) *de manière totalement arbitraire alors* $f(x,y)$ *tend toujours vers le même nombre* l.

Que veut dire (x,y) ***tend vers*** (x_0,y_0) ***de manière totalement arbitraire?***

Contrairement à la droite réelle $\mathbb{R}$, *où le point* $x\in\mathbb{R}$ *a seulement deux manières de tendre vers le point* x_0, *à gauche* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\<}} f(x)$ *ou à droite* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\>}} f(x)$, , *et on sait que si ces deux limites sont distinctes alors la limite n'existe pas.*

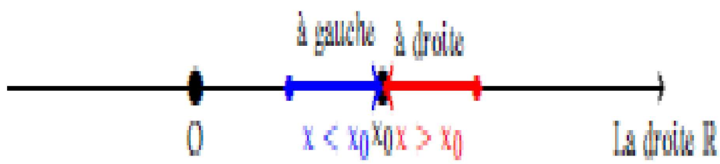

FIG. 3.6 – *La limite en un point sur* $\mathbb{R}$.

Dans le cas du plan $\mathbb{R}^2$, *il existe une infinité de façons de tendre vers le point* (x_0,y_0). *On peut tendre vers* (x_0,y_0) *suivant une droite ou bien un cercle ou bien une parabole, ou suivant une courbe quelconque.*

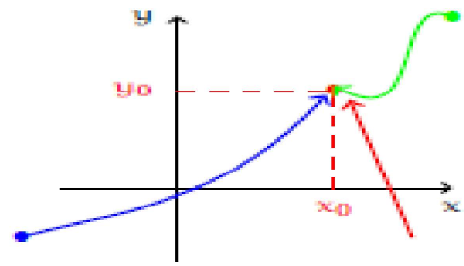

FIG. 3.7 – *La limite en un point sur* $\mathbb{R}^2$.

Dans ce cas, on peut procéder de la manière suivante :

1− *On commence par un changement de variables :*

$$t = x - x_0,\ s = y - y_0 \quad \textit{alors} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x,y\right) = \lim_{(t,s)\to(0,0)} F\left(t,s\right) \ \textit{avec}\ F\left(t,s\right) = f\left(t + x_0, s + y_0\right).$$

2− *On vérifie si l'égalité suivante est vraie :*

$$\lim_{t\to 0}\left(\lim_{s\to 0} F\left(t,s\right)\right) \overset{?}{=} \lim_{s\to 0}\left(\lim_{t\to 0} F\left(t,s\right)\right).$$

• *Si elle n'est pas vérifiée on arrête et on dit que :*

$$\lim_{(t,s)\to(0,0)} F\left(t,s\right) = \nexists \Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\left(x,y\right) = \nexists.$$

• *Si elle est vérifiée alors tous ce qu'on peut dire est que cette limite commune qu'on notera L est une limite éventuelle*

$$\lim_{t\to 0}\left(\lim_{s\to 0} F\left(t,s\right)\right) = \lim_{s\to 0}\left(\lim_{t\to 0} F\left(t,s\right)\right) = L.$$

3− *Pour montrer l'existence de la limite on doit trouver une majoration de la forme :*

$$0 \leq \left|F\left(t,s\right) - L\right| \leq \beta\left(t,s\right) \quad \textit{avec} \lim_{(t,s)\to(0,0)} \beta\left(t,s\right) = 0.$$

Comment démontrer que la limite d'une fonction de deux variables n'existe pas

Considérons l'implication suivante

$$\left\{\lim_{(t,s)\to(0,0)} F\left(t,s\right) = L\right\} \Longrightarrow \forall m \in \mathbb{R} : \left\{\lim_{\substack{(t,s)\to(0,0)\\ s=mt}} F\left(t,s\right) = L\right\}.$$

Notons (P) *et* (Q) *les deux propositions suivantes :*

$$(P) : \left\{ \lim_{(t,s)\to(0,0)} F(t,s) = L \right\}.$$

$$(Q) : \forall m \in \mathbb{R}\text{:} \left\{ \lim_{\substack{(t,s)\to(0,0) \\ s=mt}} F(t,s) = L \right\}.$$

On a bien sur $(P) \implies (Q)$ *or ceci est équivalent à* $non(Q) \implies non(P)$.

Remarque 3.3 *On pourrait choisir d'autres directions qui ne sont pas nécessairement des droites.*

Résumé:

$\star$ *Pour démontrer que* $\lim_{(t,s)\to(0,0)} F(t,s)$ *n'existe pas, il suffit de trouver* $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $m_1 \neq m_2$ *tel que*

$$\lim_{\substack{(t,s)\to(0,0) \\ s=m_1 t}} F(t,s) = L_1, \quad \lim_{\substack{(t,s)\to(0,0) \\ s=m_2 t}} F(t,s) = L_2 \ \text{ avec } L_1 \neq L_2.$$

$\star$ *Sinon il faut voir avec l'un des chemins suivants pour montrer **l'inexistence** de la limite*

$$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{\substack{(t,s)\to(0,0) \\ s=t}} F(t,s) \neq L \\ \lim\limits_{\substack{(t,s)\to(0,0) \\ s=mt}} F(t,s) \neq L \\ \lim\limits_{\substack{(t,s)\to(0,0) \\ s=mt}} F(t,s) = \text{dépend que de } m \\ \lim\limits_{\substack{(t,s)\to(0,0) \\ s=t^m}} F(t,s) \neq L \end{array}\right\} \implies \lim_{(t,s)\to(0,0)} F(t,s) = \nexists.$$

$\star$ *On peut avec les coordonnées polaires confirmer **l'existence ou l'inexistence** de la limite, en procédant comme suit :*

$$t = r\cos\theta,\ s = r\sin\theta \quad \text{alors} \lim_{(t,s)\to(0,0)} |F(t,s) - L| = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \theta\in\mathbb{R}}} |F(r\cos\theta, r\sin\theta) - L|.$$

a) *Si* $|F(r\cos\theta, r\sin\theta) - L| \leq N\beta(r) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$ *avec* $N > 0$ *et* β *une fonction définie et bornée sur* $\mathbb{R}$ *alors* $\lim\limits_{\substack{r\to 0 \\ \theta\in\mathbb{R}}} |F(r\cos\theta, r\sin\theta) - L| = 0$ *et par conséquent :*

$$\lim_{(t,s)\to(0,0)} F(t,s) = L.$$

b) *Si* $\lim\limits_{\substack{r\to 0 \\ \theta\in\mathbb{R}}} |F(r\cos\theta, r\sin\theta) - L|$ *dépend que de* θ *alors*

$$\lim_{(t,s)\to(0,0)} F(t,s) = \nexists.$$

Exemple 3.9 .

1− *Montrer que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ *n'existe pas*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

Donc comme $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)\neq\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)$, *alors* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ *n'existe pas.*

2− *Montrer que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$

On a d'une part que :

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right).$$

D'autre part comme

$$2\,|xy|\leq x^2+y^2,\quad \forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2.$$

alors

$$0\leq|\frac{x^2y}{x^2+y^2}|\leq\frac{1}{2}\,|x|\,,\quad\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\quad \textit{avec}\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\,|x|=0.$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$

3− *Montrer que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *n'existe pas*

$$\lim_{(x,y)\underset{y=mx}{\to}(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\underset{y=mx}{\to}(0,0)}\frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2}=\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

comme la limite dépend que de m, alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *n'existe pas.*

4− *Montrer que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *n'existe pas*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\frac{0}{0}=F.I.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)=0.$$

$$\lim_{(x,y)\underset{y=mx}{\to}(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{(x,y)\underset{y=mx}{\to}(0,0)}\frac{x\,(mx)^2}{x^2+(mx)^4}=\lim_{x\to 0}\frac{m^2x}{1+m^4x^2}=0.$$

$$\lim_{(x,y)\underset{y=\sqrt{x}}{\to}(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{(x,y)\underset{y=x^2}{\to}(0,0)}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *n'existe pas.*

5− *Calculer* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$ *en utilisant les coordonnées polaires*

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\ \to\ 0 \\ \forall\theta\in\mathbb{R}}} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = \lim_{\substack{r\ \to\ 0 \\ \forall\theta\in\mathbb{R}}} r\cos^3\theta = 0 \text{ car } |\cos^3\theta| \leq 1.$$

6− *Calculer* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ *en utilisant les coordonnées polaires*

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\ \to\ 0 \\ \forall\theta\in\mathbb{R}}} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \lim_{\substack{r\ \to\ 0 \\ \forall\theta\in\mathbb{R}}} \cos\theta\sin\theta \text{ la limite dépend que de } \theta.$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ *n'existe pas.*

Remarque 3.4 *Faite attention dans l'utilisation des coordonnées polaires, si on abouti à une limite comme :*

$$\lim_{\substack{r\ \to\ 0 \\ \forall\theta\in\mathbb{R}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{\substack{r\ \to\ 0 \\ \forall\theta\in\mathbb{R}}} g(r).\beta(\theta) \text{ avec } \lim_{r\to0} g(r) = 0 \text{ et } \beta(\theta) \text{ une fonction non bornée.}$$

On ne peut pas écrire :

$$\lim_{\substack{r\ \to\ 0 \\ \forall\theta\in\mathbb{R}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0.$$

Exemple 3.10 *Montrer que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$ *n'existe pas.*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x} = \lim_{\substack{r\ \to\ 0 \\ \forall\theta\in\mathbb{R}}} \frac{r^2\sin^2\theta}{\cos\theta} \neq 0.$$

Car $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ *n'est pas bornée*

$$\left|\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right| \underset{\theta\to\frac{\pi}{2}}{\to} \infty.$$

3.3 Continuité des fonctions de deux variables

***Définition 3.14** (**Continuité en un point et continuité sur** $\mathbb{R}^2$)*

• *Soit* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. f *est dite continue au point* (x_0,y_0), *si les trois conditions a), b) et c) sont vérifiées*

a) f *est définie au point* (x_0,y_0).

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ *existe.*

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

• *On dit que* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$ *si elle est continue en tout point de* $\mathbb{R}^2$.

***Exemple 3.11** .*

1− *Considérons la fonction* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Le point a) est vérifié. Par contre le point b) n'est pas satisfait. En effet, d'après l'exemple précédent, on a montré que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *n'existe pas. Donc* f *n'est pas continue au point* $(0,0)$.

2− *Considérons la fonction* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+2y & si\ \ (x,y)\neq(1,2)\\ 5 & si\ \ (x,y)=(1,2)\end{cases}$$

Les points a), b) et c) sont vérifiés. Donc f *est continue au point* $(1,2)$.

Opérations sur les fonctions continues

Soient f *et* g *deux fonctions définies et continues* $\mathbb{R}^2$, *alors :*

⋆ *Les fonctions* $f\pm g$ *sont continues sur* $\mathbb{R}^2$.

⋆ *La fonction* $f\cdot g$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

⋆ *La fonction* λf $(\lambda\in\mathbb{R})$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

⋆ *Si* $g\neq 0$ *sur* $\mathbb{R}^2 \implies$ *la fonction* $\frac{f}{g}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

3.4 Dérivées partielles

Rappelons que $V_\eta(x_0,y_0)$ *est le disque ouvert de centre* (x_0,y_0) *et de rayon* η, *c'est à dire*

$$V_\eta(x_0,y_0)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\eta^2\right\}.$$

3.4.1 Dérivées partielles d'ordre un d'une fonction de deux variables en un point (x_0, y_0).

Définition 3.15 *Soit $f : V_\eta(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$. On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x au point (x_0, y_0) et on la note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, si la limite suivante existe*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à y au point (x_0, y_0) et on la note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, si la limite suivante existe

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Exemple 3.12 .

1− *Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2.$$

et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Calculez en utilisant la définition $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
Par définition on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x_0 + h)^2 - (x_0 + h)\, y_0 + (y_0)^2 - \left(2x_0^2 - x_0 y_0 + y_0^2\right)}{h}, \\
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2h + 4x_0 - y_0)}{h} = 4x_0 - y_0.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{2(x_0)^2 - x_0(y_0 + k) + (y_0 + k)^2 - \left(2x_0^2 - x_0 y_0 + y_0^2\right)}{k}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{k \to 0} \frac{k(k + 2y_0 - x_0)}{k} = 2y_0 - x_0.
\end{aligned}$$

2− *Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x, y) = (0,0). \end{cases}$$

Calculez en utilisant la définition $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
Par définition on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0;$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0.$$

Donc f admet des dérivées partielles d'ordre un en $(0,0)$.

Remarque 3.5 1− *Une fonction qui admet des dérivées partielles d'ordre un au point* (x_0, y_0) *n'est pas forcément une fonction continue au point* (x_0, y_0).

2− *Une fonction continue au point* (x_0, y_0) *n'implique pas en général l'existence des dérivées partielles d'ordre un au point* (x_0, y_0).

Il suffit de considéré l'exemple suivant :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

qui n'est pas continue en $(0,0)$, *mais qui admet des dérivées partielles en* $(0,0)$.

3.4.2 La fonction dérivée partielle

Supposons qu'on a une fonction de deux variables définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}^2$, D étant un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe pour tout $(x_0, y_0) \in D$, alors on peut définir une fonction de deux variables définie sur D et à valeurs réelles de la façon suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existe pour tout $(x_0, y_0) \in D$, alors on peut définir une fonction de deux variables définie sur D et à valeurs réelles de la façon suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial y} : D \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

3.4.3 Dérivées partielles d'ordre deux

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction à deux variables dont les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et admettent à leurs tour des dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

*Ces dérivées partielles sont appelées les **dérivées partielles d'ordre 2 de f**, ce qui nous permet de définir la matrice (2×2) dite matrice **Hessienne**, notée H_f et définie par :*

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Définition 3.16 *Soit $f : V_\eta(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$. Par définition, on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{k},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{h},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{k}.$$

Exemple 3.13 *Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x,y) = x^3 y + e^{xy^2}.$$

Calculez f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}, f''_{yx}.

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 y + y^2 e^{xy^2}, \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2xye^{xy^2}.$$

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy + y^4 e^{xy^2}, \quad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(2x + 4x^2y^2\right) e^{xy^2}.$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3x^2 + \left(2y + 2xy^3\right) e^{xy^2}, \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2 + \left(2y + 2xy^3\right) e^{xy^2}.$$

Remarque 3.6 *Remarquons que dans cet exemple on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ceci n'est pas toujours vrai. Avec des conditions sur la fonction $f(x,y)$, cela devient vraie.

Théorème 3.1 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, une fonction de deux variables. On suppose qu'il existe un voisinage $V_\eta(x_0,y_0)$ du point (x_0,y_0) tel que les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1− $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ existent pour tout $(x,y) \in V_\eta(x_0,y_0)$.

2− Les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ sont continues en tout point $(x,y) \in V_\eta(x_0,y_0)$.

Alors on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

3.5 Fonctions différentiables

L'existence des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ n'est pas la notion qui remplace la notion de dérivabilité qu'on a défini pour les fonctions d'une variable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3.5.1 Définition des fonctions différentiables. Cas des fonctions d'une seule variable réelle

Définition 3.17 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. f est dite (dérivable) différentiable au point x_0 si par définition, il existe une constante $A \in \mathbb{R}$, une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + h\varepsilon(h) \quad \textit{avec} \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

3.5.2 Définition des fonctions différentiables. Cas des fonctions de deux variables réelles

Définition 3.18 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. f est dite différentiable au point (x_0,y_0) si par définition, il existe deux constantes $A,B \in \mathbb{R}$, deux fonctions $\varepsilon_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varepsilon_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

telles que :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0,y_0) + Ah + Bk + h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k) \ \textit{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) = 0 \ \textit{et} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2(h,k) = 0.$$

Définition 3.19 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. f est dite différentiable au point (x_0,y_0) si par définition, il existe deux constantes $A,B \in \mathbb{R}$, une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, telle que :*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0,y_0) + Ah + Bk + \sqrt{h^2 + k^2}\,\varepsilon(h,k) \quad \textit{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0.$$

Exemple 3.14 *Considérons la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x,y) = 2x + 3y.$$

Montrez que la fonction f *est différentiable en tout point* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

D'après la définition précédente, il faut montrer qu'il existe deux constantes $A, B \in \mathbb{R}$*, deux fonctions* $\varepsilon_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* $\varepsilon_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *telles que :*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k) \text{ avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) = 0 \text{ et } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2(h,k) = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= 2(x_0 + h) + 3(y_0 + k) - 2x_0 - 3y_0, \\ &= 2h + 3k. \end{aligned}$$

Donc f *est différentiable en prenant*

$$A = 2,\ B = 3,\ \varepsilon_1(h,k) = 0,\ \varepsilon_2(h,k) = 0.$$

3.5.3 Relation entre fonction différentiable et existence des dérivées partielles d'ordre un

Théorème 3.2 *Soit* $f : V_\eta(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$*, différentiable au point* (x_0, y_0)*. Alors* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ *existent et on a*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k + h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k) \\ \text{avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) &= 0 \text{ et } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2(h,k) = 0. \end{aligned}$$

Preuve. f *est différentiable au point* (x_0, y_0)*. Donc par définition, on a*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= Ah + Bk + h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k) \\ \text{avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) &= 0 \text{ et } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2(h,k) = 0. \end{aligned}$$

a) Prenons $k = 0$ *on aura*

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = Ah + h\varepsilon_1(h,k) \text{ avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) = 0.$$

En divisant par h*, on obtient*

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = A + \varepsilon_1(h,k) \text{ avec } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) = 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}=A.$$

Or par définition

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right).$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)=A.$$

b) Prenons $h=0$ on aura

$$f\left(x_0,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)=Bk+k\varepsilon_2\left(h,k\right)\ \textit{avec}\ \lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon_2\left(h,k\right)=0.$$

En divisant par h, on obtient

$$\frac{f\left(x_0,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{k}=B+\varepsilon_2\left(h,k\right)\ \textit{avec}\ \lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon_2\left(h,k\right)=0.$$

Par conséquent

$$\lim_{k\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{k}=B.$$

Or par définition

$$\lim_{k\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{k}=\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right).$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)=B.$$

Finalement

$$\begin{aligned}f\left(x_0+h,y_0+k\right) &= f\left(x_0,y_0\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)h+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)k+h\varepsilon_1\left(h,k\right)+k\varepsilon_2\left(h,k\right)\\ \textit{avec}\ \lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon_1\left(h,k\right) &= 0\ \textit{et}\ \lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon_2\left(h,k\right)=0.\end{aligned}$$

■

3.5.4 Relation entre différentiabilité et continuité

Théorème 3.3 *Soit $f: V_\eta\left(x_0,y_0\right)\to\mathbb{R}$, différentiable au point $\left(x_0,y_0\right)$. Alors f est continue au point $\left(x_0,y_0\right)$.*

Preuve. *f est différentiable au point (x_0,y_0). Donc par définition, on a*

$$\begin{aligned} f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0) &= Ah+Bk+h\varepsilon_1(h,k)+k\varepsilon_2(h,k) \\ \textit{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) &= 0 \textit{ et } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2(h,k)=0. \end{aligned}$$

Posons

$$x=x_0+h \Longrightarrow h=x-x_0.$$

$$y=y_0+k \Longrightarrow k=y-y_0.$$

$$(h,k)\to(0,0) \Longleftrightarrow (x,y)\to(x_0,y_0).$$

Avec ces changements de variables, on a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+(x-x_0)\varepsilon_1((x-x_0),(y-y_0)) \\ &\quad +(y-y_0)\varepsilon_2((x-x_0),(y-y_0)) \end{aligned}$$

$$\textit{avec} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon_1((x-x_0),(y-y_0))=0 \textit{ et } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon_2((x-x_0),(y-y_0))=0.$$

Remarquons que lorsque $(x,y)\to(x_0,y_0)$, alors on a

$$A(x-x_0)\to 0,\ B(y-y_0)\to 0.$$

$$(x-x_0)\varepsilon_1((x-x_0),(y-y_0))\to 0,\ (y-y_0)\varepsilon_2((x-x_0),(y-y_0))\to 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Donc f est continue au point (x_0,y_0). ■

3.6 Notion de différentielle

Notons par

$$\Delta f_{(x_0,y_0)}(h,k) = f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k+h\varepsilon_1(h,k)+k\varepsilon_2(h,k)$$

$$\textit{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) = 0 \textit{ et } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2(h,k)=0.$$

Si on fait un petit accroissement h de la variable x qu'on note dx et un petit accroissement k de la variable y, qu'on note dy; alors les quantités $h\varepsilon_1(h,k)$ et $k\varepsilon_2(h,k)$ seraient négligeables et on obtient une approximation facile à calculer de $\Delta f_{(x_0,y_0)}(h,k)$ qui sera

$$\Delta f_{(x_0,y_0)}(h,k)\simeq\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k.$$

Notons $df_{(x_0,y_0)}(h,k)$ *l'expression suivante*

$$df_{(x_0,y_0)}(h,k) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k.$$

Alors

$$\Delta f_{(x_0,y_0)}(h,k) \simeq df_{(x_0,y_0)}(h,k).$$

Définition 3.20 *Soit* f *une fonction admettant des dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ *au point* (x_0,y_0). *La fonction* $df_{(x_0,y_0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2, \quad df_{(x_0,y_0)}(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k.$$

s'appelle différentielle de f *au point* (x_0,y_0).

Exemple 3.15 *Considérons la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = x^2y - 3y.$$

Soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ *et* $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.
1) *Montrer que* f *est différentiable en tout point* $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) &= \left((x_0+h)^2(y_0+k) - 3(y_0+k)\right) - x_0^2y_0 + 3y_0, \\ &= x_0^2y_0 + kx_0^2 + 2hx_0y_0 + 2hkx_0 + h^2y_0 + h^2k - 3y_0 - 3k - x_0^2y_0 + 3y_0, \\ &= (2x_0y_0)\,h + (x_0^2-3)\,k + h(hy_0+hk) + k(2hx_0). \end{aligned}$$

Si on pose

$$A = (2x_0y_0),\ B = (x_0^2-3),\ \varepsilon_1(h,k) = (hy_0+hk),\ \varepsilon_2(h,k) = (2hx_0).$$

Alors on a

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} (hy_0+hk) = 0, \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} (2hx_0) = 0.$$

Par conséquent, on peut écrire

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + Ah + Bk + h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k)$$

$$\text{avec} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_1(h,k) = 0 \text{ et } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon_2(h,k) = 0.$$

Ceci est exactement la définition de la différentiabilité de f *au point* (x_0,y_0) *: On peut vérifier par un calcul direct que*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = (2x_0y_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = (x_0^2-3).$$

2) *Calculer* $\Delta f_{(x_0,y_0)}(h,k)$.

$$\begin{aligned}\Delta f_{(x_0,y_0)}(h,k) &= f\left(x_0+h,y_0+k\right)-f\left(x_0,y_0\right),\\ &= \left(2x_0y_0\right)h+\left(x_0^2-3\right)k+h\left(hy_0+hk\right)+k\left(2hx_0\right).\end{aligned}$$

3) *Calculer* $df_{(x_0,y_0)}(h,k)$.
D'après la définition de la différentielle, on a

$$\begin{aligned}df_{(x_0,y_0)}(h,k) &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)h+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)k,\\ &= \left(2x_0y_0\right)h+\left(x_0^2-3\right)k.\end{aligned}$$

3.7 Propriétés des fonctions de deux variables de classe C^1 ou C^2

3.7.1 Fonctions de deux variables de classe C^1 ou C^2

Rappel :

Nous allons généraliser la notion d'intervalle ouvert à $\mathbb{R}^2$. *Soit* $]a,b[$ *un intervalle ouvert dans* $\mathbb{R}$. *Remarquons que si* $x_0\in\,]a,b[$, *alors il existe un intervalle ouvert de centre* x_0 *et de rayon*

$r>0$: $I_r=\,]x_0-r,x_0+r[$ *tel que* $I_r\subset\,]a,b[$.

La même définition reste valable dans $\mathbb{R}^2$, *en remplaçant* I_r *par un disque ouvert* D_r *de centre* $\left(x_0,y_0\right)$ *et rayon* r :

$$D_r\left(x_0,y_0\right)=\left\{\left(x_0,y_0\right)\in\mathbb{R}^2:(x-x_0)^2+\left(y-y_0\right)^2<r^2\right\},$$

alors on obtient la définition suivante :

Définition 3.21 *Soit* $U\subset\mathbb{R}^2$, *on dit que* U *est un ensemble ouvert si pour tout point* $\left(x_0,y_0\right)\in U$, *il existe un disque ouvert de centre* $\left(x_0,y_0\right)$ *et rayon* $r>0$ *tel que*

$$D_r\left(x_0,y_0\right)\subset U.$$

Définition 3.22 *(**Fonction de classe** C^1 **ou** C^2)*

Soit $U\subset\mathbb{R}^2$ *un ensemble ouvert et* $f:U\to\mathbb{R}$.

1− *On dit que* f *est de classe* C^1 *dans* U *et on note* $f\in C^1(U)$ *si*

⋆ $\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)$ *existent en tout point* $\left(x,y\right)\in U$.

⋆ $\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)$ *sont continues en tout point* $\left(x,y\right)\in U$.

2− *On dit que* f *est de classe* C^2 *dans* U *et on note* $f\in C^2(U)$ *si*

⋆ *Toutes les dérivées partielles d'ordre* 2 *de* f *existent en tout point* $\left(x,y\right)\in U$.

⋆ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ *sont continues en tout point* $\left(x,y\right)\in U$.

Exemple 3.16 *Considérons la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x,y)=x^3+y^3.$$

1) *Montrer que $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$.*

Puisque f est un polynôme de deux variables, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existent en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2.$$

Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont continues en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, Donc f est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$.

2) *Montrer que $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$.*

Puisque $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont des polynômes,, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ existent en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6y,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=0.$$

Les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ sont continues en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, Donc f est de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2$.

Remarque 3.7 *Dans l'exemple précédent, on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y).$$

Ceci est vrai pour les fonctions de classe C^2.

Théorème 3.4 *Soit $f:U\to\mathbb{R}$ telle que f est de classe C^2 dans U. Alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y),\ \forall (x,y)\in U.$$

3.7.2 Dérivées partielles des fonctions composées

3.7.2.1 Fonctions composées de type 1

Considérons trois fonctions de deux variables f ; g et h suivantes :

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},$$

$$(x,y)\to f(x,y)=z.$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$(r,s) \to g(r,s) = x.$$

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$(r,s) \to h(r,s) = y.$$

Considérons maintenant une fonction composée de deux variables définie de la façon suivante :

$$f(x,y) = f\left(g(r,s), h(r,s)\right) = F(r,s) \quad \text{où } g(r,s) = x \text{ et } h(r,s) = y.$$

On a finalement

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$(r,s) \to \left(g(r,s), h(r,s)\right) \to f\left(g(r,s), h(r,s)\right) = F(r,s).$$

Exemple 3.17 *Considérons trois fonctions de deux variables f ; g et h suivantes :*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$(x,y) \to f(x,y) = \frac{x^2}{y}.$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$(r,s) \to g(r,\theta) = r\sin(\theta) = x.$$

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$(r,s) \to h(r,\theta) = r\cos(\theta) = y.$$

Calculez $f\left(g(r,\theta), h(r,\theta)\right) = F(r,\theta)$.

$$F(r,\theta) = f(r\sin(\theta), r\cos(\theta)) = \frac{r^2\sin^2(\theta)}{r\cos(\theta)} = r\tan(\theta)\sin(\theta).$$

3.7.2.2 Fonctions composées de type 2

Considérons les 3 fonctions f ; g et h suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$(x,y) \to f(x,y) = z.$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$t \to g(t) = x.$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$t \to h(t) = y.$$

Considérons maintenant une fonction composée de deux variables définie de la façon suivante :

$$f(x,y) = f(g(t), h(t)) = F(t) \quad \text{où } g(t) = x \text{ et } h(t) = y.$$

On a finalement

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$t \to (g(t), h(t)) \to f(g(t), h(t)) = F(t).$$

Exemple 3.18 *Considérons trois fonctions de deux variables f ; g et h suivantes :*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$(x,y) \to f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy.$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$t \to g(t) = \cos(t) = x.$$
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$t \to h(t) = \sin(t) = y.$$

Calculez $F(t)$.

$$F(t) = f(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t) + \sin^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) = 1 + 2\cos(t)\sin(t).$$

3.7.2.3 Dérivées partielles des fonctions composées du type 1

Considérons la fonction

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$(r,s) \to \left(g(r,s), h(r,s)\right) \to f\left(g(r,s), h(r,s)\right) = F(r,s).$$

Alors

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial r},$$
$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial s}.$$

Exemple 3.19 *Considérons la fonction*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$(r,s) \to \left(g(r,s), h(r,s)\right) \to f\left(g(r,s), h(r,s)\right) = F(r,s),$$

avec

$$f\left(x,y\right) = \frac{x^2}{y}, \quad x = g(r,\theta) = r\sin(\theta), \quad y = h(r,\theta) = r\cos(\theta).$$

Calculez de deux façons différentes $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial F}{\partial \theta}$.

Première méthode :

$$F(r,\theta) = r\tan(\theta)\sin(\theta), \quad \frac{\partial F}{\partial r} = \tan(\theta)\sin(\theta), \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = r\tan(\theta)\cos(\theta) + r\left(1+\tan^2(\theta)\right)\sin(\theta).$$

Deuxième méthode *:*

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = 2\tan(\theta)\sin(\theta) - \tan^2(\theta)\cos(\theta) = \tan(\theta)\sin(\theta).$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = 2r\tan(\theta)\cos(\theta) + r\tan^2(\theta)\sin(\theta).$$

3.7.2.4 Dérivées partielles des fonctions composées du type 2

Considérons les 3 fonctions f ; g et h suivantes :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$\left(x,y\right) \to f\left(x,y\right) = z.$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$t \to g(t) = x.$$

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$t \to h(t) = y.$$

Considérons maintenant une fonction composée de deux variables définie de la façon suivante :

$$f(x,y) = f(g(t),h(t)) = F(t) \quad \text{où } g(t) = x \text{ et } h(t) = y.$$

On a finalement

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$t \to (g(t),h(t)) \to f(g(t),h(t)) = F(t).$$

Alors

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt}.$$

Exemple 3.20 *Considérons la fonction suivante*

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

$$t \to (g(t),h(t)) \to f(g(t),h(t)) = F(t).$$

avec

$$f(x,y) = F(t) = x^2 + y^2 + 2xy, \ \ x = g(t) = \cos(t), \quad y = h(t) = \sin(t).$$

Calculez de deux façons différentes $\frac{dF}{dt}$.

Première méthode *:*

$$f(g(t),h(t)) = F(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) + 2\cos(t)\sin(t) = 1 + 2\cos(t)\sin(t).$$

$$\frac{dF}{dt} = -2\sin^2(t) + 2\cos^2(t).$$

Deuxième méthode *:*

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = -(2\cos(t) + 2\sin(t))\sin(t) + (2\cos(t) + 2\sin(t))\cos(t),$$

$$\frac{dF}{dt} = -2\cos(t)\sin(t) - 2\sin^2(t) + 2\cos^2(t) + 2\cos(t)\sin(t),$$

$$\frac{dF}{dt} = -2\sin^2(t) + 2\cos^2(t).$$

3.8 Formule de Taylor pour les fonctions à deux variables

Nous avons défini les dérivées partielles d'ordre 2*, ceci nous permet de définir les dérivées partielles d'ordre* 3 *et ainsi de suite jusqu'à l'ordre* n*. On procède comme suit :*

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)...$$

Si on a les dérivées partielles d'ordre $(n-1)$*, alors les dérivées partielles d'ordre* n *seront définis et calculés de la même manière suivante :*

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right), \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}\right)...$$

***Notations** :*

$$D_r\left(x_0, y_0\right) = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x - x_0)^2 + \left(y - y_0\right)^2 < r^2\right\}.$$

$$\bar{D}_r\left(x_0, y_0\right) = \left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x - x_0)^2 + \left(y - y_0\right)^2 \leq r^2\right\}.$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f\left(x_0, y_0\right) = h\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right) + k\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right).$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(x_0, y_0\right) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x_0, y_0\right) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(x_0, y_0\right) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x_0, y_0\right).$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\left(x_0, y_0\right) = h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\left(x_0, y_0\right) + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\left(x_0, y_0\right) + 3hk^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}\left(x_0, y_0\right) + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(x_0, y_0\right).$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\left(x_0, y_0\right) = C_n^0 h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\left(x_0, y_0\right) + C_n^1 h^{n-1}k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\left(x_0, y_0\right) + ... + C_n^n k^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\left(x_0, y_0\right).$$

Avec ces notations , on a le théorème de Taylor suivant

***Théorème 3.5** (**Formule de Taylor d'ordre** n)*

Considérons une fonction de deux variables $f(x, y)$ *admettant les propriétés suivantes :*

1) $f(x, y)$ *possède des dérivées partielles d'ordre* n*, continues dans* $\bar{D}_r\left(x_0, y_0\right)$.

2) $f(x, y)$ *possède des dérivées partielles d'ordre* $(n+1)$ *dans* $D_r\left(x_0, y_0\right)$.

Alors on a

$$\begin{aligned} f\left(x_0+h,y_0+k\right) &= f\left(x_0,y_0\right)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\left(x_0,y_0\right)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(x_0,y_0\right) \\ &\quad +\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\left(x_0,y_0\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\left(x_0,y_0\right)+R_n, \end{aligned}$$

avec

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\left(x_0+\theta h,y_0+\theta k\right);\ \ 0<\theta<1.$$

et

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} R_n=0$$

Théorème 3.6 *(**Formule de Taylor d'ordre** 2)*

Considérons une fonction de deux variables $f(x,y)$ admettant les propriétés suivantes :

1) $f(x,y)$ *possède des dérivées partielles d'ordre* 2, *continues dans* $\bar{D}_r\left(x_0,y_0\right)$.

2) $f(x,y)$ *possède des dérivées partielles d'ordre* 3 *dans* $D_r\left(x_0,y_0\right)$.

Alors on a

$$f\left(x_0+h,y_0+k\right)=f\left(x_0,y_0\right)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f\left(x_0,y_0\right)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(x_0,y_0\right)+R_2,$$

avec

$$R_2=\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f\left(x_0+\theta h,y_0+\theta k\right);\ \ 0<\theta<1,$$

et

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} R_2=0 \ \ et \ \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R_2}{h^2+k^2}=0.$$

Exemple 3.21 .

1– *Le développement de Taylor à l'ordre* 2 *au voisinage de* $(1,0)$ *de la fonction* $f\left(x,y\right)=x^2y+y^2$ *est donné par :*

$$f\left(x,y\right)=y+2\left(x-1\right)y+y^2+o\left(\left\|\left(x-1,y\right)\right\|^2\right).$$

2– *Le développement de Taylor à l'ordre* 2 *au voisinage de* $(0,0)$ *de la fonction* $f\left(x,y\right)=e^x\sin y$ *est donné par :*

$$f\left(x,y\right)=y+xy+\frac{1}{2}x^2y+o\left(\left\|\left(x,y\right)\right\|^2\right).$$

3.9 Optimisation et points critiques

Définition 3.23 *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $(\hat{x},\hat{y}) \in \mathbb{R}^2$*

• *On dit que $(\hat{x},\hat{y})$ est une solution minimale (resp.maximale) locale, s'il existe un disque ouvert $D_r(\hat{x},\hat{y})$ de centre $(\hat{x},\hat{y})$ et rayon $r>0$ tel que*

$$\forall (x,y) \in D_r(\hat{x},\hat{y}),\ f(x,y) \geq f(\hat{x},\hat{y}) \quad (f(x,y) \leq f(\hat{x},\hat{y})).$$

• *On dit que $(\hat{x},\hat{y})$ est une solution minimale (resp.maximale) globale sur $\mathbb{R}^2$ si*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geq f(\hat{x},\hat{y}) \quad (f(x,y) \leq f(\hat{x},\hat{y})).$$

• *On dit que $(\hat{x},\hat{y})$ est une solution minimale (resp.maximale) locale stricte, s'il existe un disque ouvert $D_r(\hat{x},\hat{y})$ de centre $(\hat{x},\hat{y})$ et rayon $r>0$ tel que*

$$\forall (x,y) \in D_r(\hat{x},\hat{y}),\ (x,y) \neq (\hat{x},\hat{y}),\ f(x,y) > f(\hat{x},\hat{y}) \quad (f(x,y) < f(\hat{x},\hat{y})).$$

Exemple 3.22 .

1− *La fonction $f(x,y) = x^2+y^2$ admet un minimum global en $(0,0)$ car*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \geq 0 = f(0,0).$$

2− *La fonction $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ admet un maximum global en $(0,0)$ car*

$$\forall (x,y) \in D_f,\ \sqrt{1-x^2-y^2} \leq 1 = f(0,0).$$

Définition 3.24 *(**Condition nécessaire**)*

$(\hat{x},\hat{y})$ s'appelle point stationnaire de f ou point critique si on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},\hat{y}) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y}) = 0 \end{cases}.$$

Exemple 3.23 *Trouvez tous les points stationnaires de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$f(x,y) = x^2+y^2.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},\hat{y}) = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y}) = 2y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Donc f admet un seul point stationnaire $(0,0)$.

Proposition 3.1 *Si f admet un extremum local en $(\hat{x},\hat{y})$ alors $(\hat{x},\hat{y})$ est un point critique de f.*

Exemple 3.24 *La fonction* $f(x,y) = x^3+y^3+x+y-2$ *n'admet pas d'extremums car elle n'admet pas de points critiques.*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},\hat{y}) = 3x^2+1=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y}) = 3y^2+1=0 \end{cases}$$

qui est un système sans solution.

Remarque 3.8 *La condition donnée ci-dessus n'est pas suffisante, car les points critiques ne sont pas forcément des extremums locaux mais juste des candidats.*

Proposition 3.2 ***(Conditions suffisantes)***

Soit f *une fonction de classe* C^2 *sur un disque ouvert* $D_r(\hat{x},\hat{y})$ *et* $(\hat{x},\hat{y})$ *un point stationnaire de* f *, posons :*

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\hat{x},\hat{y}),\ r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x},\hat{y}),\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\hat{x},\hat{y}),\ Dét_{(\hat{x},\hat{y})} = rt - s^2.$$

Alors

⋆ *Si* $Dét_{(\hat{x},\hat{y})} > 0$ *et* $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x},\hat{y}) < 0$ *alors* f *possède un maximum local en* $(\hat{x},\hat{y})$.

⋆ *Si* $Dét_{(\hat{x},\hat{y})} > 0$ *et* $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x},\hat{y}) > 0$ *alors* f *possède un minimum local en* $(\hat{x},\hat{y})$.

⋆ *Si* $Dét_{(\hat{x},\hat{y})} < 0$ *alors* f *ne possède ni un maximum local ni un minimum local en* $(\hat{x},\hat{y})$*, on dit que* f *possède un point selle ou un point col en* $(\hat{x},\hat{y})$.

⋆ *Si* $Dét_{(\hat{x},\hat{y})} = 0$ *on ne peut rien dire.*

Exemple 3.25 .

1) $f(x,y) = x^2+4y^2+2x-4y+3$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},\hat{y}) = 2x+2=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y}) = 8y-4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc f *admet un seul point stationnaire* $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(-1,\frac{1}{2}\right) = 0,\ r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1,\frac{1}{2}\right) = 2,\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-1,\frac{1}{2}\right) = 8,\ Dét_{\left(-1,\frac{1}{2}\right)} = rt - s^2 = 16.$$

Comme $Dét_{\left(-1,\frac{1}{2}\right)} = 16 > 0$ *et* $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1,\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$ *alors* f *possède un minimum local en* $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

2) $f(x,y) = x^2-2xy+4y$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},\hat{y}) = 2x-2y=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y}) = -2x+4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$$

Donc f admet un seul point stationnaire $(2,2)$.

$$s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2,2)=-2,\ \ r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2)=2,\ \ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,2)=0,\ \ Dét_{(2,2)}=rt-s^2=-4.$$

Comme $Dét_{(2,2)}=-4<0$ alors f possède un point selle ou un point col en $(2,2)$.

***Définition 3.25** (Fonction concave et convexe)*

Soit f une fonction de $D\subset\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, D un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$1-$ *On dit que f est une fonction convexe sur D si*

$$\forall X=(x_1,x_2)\in D,\ \forall Y=\left(y_1,y_2\right)\in D,\ \ \forall\lambda\in[0,1],$$

$$f(\lambda X+(1-\lambda)Y)\leq\lambda f(X)+(1-\lambda)f(Y).$$

$2-$ *On dit que f est une fonction concave sur D si*

$$\forall X=(x_1,x_2)\in D,\ \forall Y=\left(y_1,y_2\right)\in D,\ \ \forall\lambda\in[0,1],$$

$$f(\lambda X+(1-\lambda)Y)\geq\lambda f(X)+(1-\lambda)f(Y).$$

***Proposition 3.3** (Fonction concave et convexe)*

Soit f une fonction de $D\subset\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, D un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On suppose que $f\in C^2(D)$, alors

$1-$ *On dit que f est une fonction concave sur D si et seulement si :*

$$\forall\left(x,y\right)\in D,\ \ Dét_{(x,y)}\geq 0\ et\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x,y\right)\leq 0.$$

$2-$ *On dit que f est une fonction convexe sur D si et seulement si :*

$$\forall\left(x,y\right)\in D,\ \ Dét_{(x,y)}\geq 0\ et\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x,y\right)\geq 0.$$

***Exemple 3.26** .*

1) *La fonction $f\left(x,y\right)=x^2+y^2$ est convexe car :*

$$s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x,y\right)=0,\ \ r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x,y\right)=2,\ \ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x,y\right)=2,\ \ Dét_{(x,y)}=rt-s^2=4,$$

d'où $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\quad Dét_{(x,y)}>0\ et\ \ r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x,y\right)=2>0.$

2) *La fonction $f\left(x,y\right)=x^4+y^4$ est convexe car :*

$$s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(x,y\right)=0,\ \ r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x,y\right)=12x^2,\ \ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(x,y\right)=12y^2,\ \ Dét_{(x,y)}=rt-s^2=144x^2y^2,$$

d'où $\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\quad Dét_{(x,y)}=144x^2y^2\geq 0\ et\ \ r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(x,y\right)=12x^2\geq 0.$

3.10 Applications

Dans cette section, nous présentons des applications économiques des fonctions de deux variables.

3.10.1 Fonction d'utilité

La relation de préférence ≪≥≫ donne le classement, par un individu, des différentes combinaisons de biens en fonction de la satisfaction qu'il lui procure.

La ***fonction d'utilité*** *représentant les préférences d'un consommateur dans un ensemble de n-biens est une fonction mathématique qui, à chaque panier composé de ces*

n-biens, fais correspondre un nombre qui respecte l'ordre des préférences. Ce qui se traduit mathématiquement par :

⋆ $(x_1,...,x_n)$ *la combinaison de n-biens dite panier de biens, constituée de nombres réels x_i représentant pour chaque $i = 1,...,n$ la quantité de bien i.*

⋆ $\mathfrak{C}_n$ *l'ensemble des paniers.*

⋆ ≪≥≫ *la relation de préférence.*

Une fonction d'utilité est une fonction U définie sur $\mathfrak{C}_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall A,B \in \mathfrak{C}_n : \ A \geq B \iff U(A) \geq U(B).$$

où ≥ est la relation d'ordre usuelle définie sur $\mathbb{R}$.

Quelques exemples de fonctions d'utilités dans le cas de deux biens, avec a,b,α,β et γ des nombres réels strictement positifs :

$$U(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}, \quad U(x,y) = \left(ax^{\alpha} + by^{\beta}\right)^{\gamma}, \quad U(x,y) = a\ln(x) + b\ln(y).$$

à titre d'application de ce qui a été fait dans ce chapitre, dans l'étude de la fonction d'utilité on retrouve :

Utilité marginal d'un bien *pour un consommateur, notée Um_i, désigne la satisfaction supplémentaire qui résulte de l'augmentation (minimal) de la quantité consommée de ce bien, elle se calcul (voir* [10] *p.*131.*) :*

$$Um_i(x_1,...,x_n) = \frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1,...,x_i,...,x_n).$$

La Courbe d'indifférence *associée à un panier quelconque A, regroupe tous les paniers qui procurent au consommateur la même satisfaction que A. Ainsi si U est la fonction d'utilité*

d'un consommateur, On notera I_A cette courbe :

$$I_A = \{B \in \mathfrak{C}_n / \ A \geq B \ et \ B \geq A\} = \{B \in \mathfrak{C}_n / \ A \sim B\}.$$

Le taux de substitution *du bien j au bien i, est le taux auquel un individu accepte d'échanger du bien i contre du bien j (voir* [10] *p*.133.*) :*

$$TMS_{j/i} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1,...,x_n)}{\frac{\partial U}{\partial x_j}(x_1,...,x_n)} = -\frac{Um_i}{Um_j}.$$

3.10.2 Fonction de production

La fonction de production est l'un des plus important outil pour les économistes. En générale, la fonction de production donne une relation entre la quantité de facteurs de production « inputs »et le volume de bien produit « output ». L'un des exemples les plus utilisé en économie est la fonction de production de **CobbDouglas** *développée en* 1928 *par deux américains : Paul. H. Douglas* (1892 – 1976) *un économiste et Charles W.Cobb un mathématicien, qui s'écrit sous la forme :*

$$Q(L,K) = AL^{\alpha}K^{\beta}.$$

avec
- *L est la quantité de travail,*
- *K est la quantité du capital investi,*
- *A,α,β sont des constantes réelles strictement positives.*

Prenons un exemple spécifique en plaçant $A = 10$ et $3b1 = 3b2 = 0.5$, donc nous avons :

$$Q(L,K) = 10L^{0,5}K^{0,5}.$$

Une isoquante *: associée à une fonction de production Q et à un niveau de production q_0 donné, est l'ensemble de toutes les combinaisons de facteurs qui permettent de produire exactement q_0. Mathématiquement cela représentent pour les fonctions de production à deux facteurs les courbes de niveau de la fonction de production :*

$$I_{q_0} = \left\{(L,K) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ / \quad Q(L,K) = q_0\right\}.$$

Exemple 3.27 *Considérons l'isoquante de la fonction de* **Cobb-Douglas** *pour un niveau de production fixé à $Q = 50$ ce qui donne la relation implicite entre la quantité de travail L et la quantité de capital K :*

$$50 = 10L^{0,5}K^{0,5},$$

on obtient la relation explicite suivante:

$$25 = LK \iff K = \frac{25}{L}.$$

De même pour un niveau de production fixé à $Q = 60$ on a la relation explicite travail-capital donnée par :

$$70 = 10L^{0,5}K^{0,5} \iff K = \frac{49}{L}.$$

***Productivité marginale** : En générale, la productivité marginale d'un facteur de production désigne l'augmentation de la quantité de bien produit qui résulte de ce facteur utilisé(voir* [10]*). Pour la fonction de production à deux facteurs on a :*

***Productivité marginale du travail** (PM_L) :*

$$PM_L = \frac{\partial Q}{\partial L}(L,K) = A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta},$$

ainsi pour une quantité de capital ≪ K ≫ fixe : $PM_L > 0$, alors Q augmente quand L augmente.

***Exemple 3.28** Si on prend le cas $Q = 10L^{0.5}K^{0.5}$. La productivité marginale du travail :*

$$PM_L = 5\sqrt{\frac{K}{L}} > 0,\ \forall L,K > 0.$$

***Productivité marginale du capital** (PM_K) :*

$$PM_K = \frac{\partial Q}{\partial K}(L,K) = A\beta L^{\alpha}K^{\beta-1},$$

ainsi pour une quantité de travail ≪ L ≫ fixe : $PM_K > 0$, alors Q augmente quand K augmente.

***Exemple 3.29** Si on prend le cas $Q = 10L^{0.5}K^{0.5}$. La productivité marginale du capital :*

$$PM_K = 5\sqrt{\frac{L}{K}} > 0,\ \forall L,K > 0.$$

***Loi de décroissance de productivité** : appliqué au travail L (resp. au capital K), stipule que si on continue à augmenté la quantité de travail avec une quantité de capital K constante, alors la croissance de la production devient de plus en plus lente, ce qui se traduit mathématiquement par la décroissance de PM_L (resp. PM_K) qu'on peut constater en calculant la dérivé partielle seconde de la fonction de production par rapport au travail (L) (resp. par rapport au capital (K)) :*

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0, \forall L > 0, K \text{ est une constante.}$$

De même si on applique cette loi au capital on aura :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0, \forall K > 0, L \text{ est une constante.}$$

***Exemple 3.30** .*

⋆ *Si on prend le cas* $Q = 10L^{0.5}K^{0.5}$. *La productivité marginale du travail est décroissante du moment que :*

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = 5\,(-0.5)\,L^{-0.5-1}K^{0.5} = -2.5L^{-1.5}K^{0.5} < 0,\ \forall L > 0,\ K \text{ est une constante.}$$

⋆ *Si on prend le cas* $Q = 10L^{0.5}K^{0.5}$. *La productivité marginale du capital est décroissante du moment que :*

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = 5\,(-0.5)\,K^{-0.5-1}L^{0.5} = -2.5K^{-1.5}L^{0.5} < 0,\ \forall K > 0,\ L \text{ est une constante.}$$

Élasticité d'un facteur de production *: mesure la variation en pourcentage ≪ % ≫ de la quantité produite à la suite d'une augmentation de* 1% *de la quantité d'un facteur (voir* [10]*).*

Mathématiquement elle se calcul par :

$$\varepsilon^L = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}(L,K)}{\frac{Q(L,K)}{L}} = \frac{L}{Q(L,K)}\frac{\partial Q}{\partial L}(L,K) = \frac{L}{AL^{\alpha}K^{\beta}}A\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta} = \alpha.$$

$$\varepsilon^K = \frac{\frac{\partial Q}{\partial K}(L,K)}{\frac{Q(L,K)}{K}} = \frac{K}{Q(L,K)}\frac{\partial Q}{\partial K}(L,K) = \frac{K}{AL^{\alpha}K^{\beta}}A\beta L^{\alpha}K^{\beta-1} = \beta.$$

Exemple 3.31 *Si on prend le cas* $Q = 10L^{0.5}K^{0.5}$. *L'élasticité des facteurs* K *et* L *:*

$$\varepsilon^L = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}(L,K)}{\frac{Q(L,K)}{L}} = \frac{L}{Q(L,K)}\frac{\partial Q}{\partial L}(L,K) = \frac{L}{10L^{0.5}K^{0.5}}5\sqrt{\frac{K}{L}} = 0.5.$$

$$\varepsilon^K = \frac{\frac{\partial Q}{\partial K}(L,K)}{\frac{Q(L,K)}{K}} = \frac{K}{Q(L,K)}\frac{\partial Q}{\partial K}(L,K) = \frac{K}{10L^{0.5}K^{0.5}}5\sqrt{\frac{L}{K}} = 0.5.$$

CHAPITRE 4
Intégrales doubles

Avant de voir comment se calcule une intégrale double essayons de répondre à la question : Pourquoi calcule-t-on une intégrale double ?

On rappelle que l'intégrale simple correspond à un calcul d'aire.

Si f est une fonction réelle définie sur un intervalle $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est égale à l'aire du domaine du plan xOy comprise entre le graphe de f et les droites d'équations $x=a$, $x=b$, $y=0$. En subdivisant $[a,b]$ en n sous intervalles $[x_{i-1},x_i]$ de même longueur $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par

$$\int_a^b f(t)\,dt=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)(x_i-x_{i-1}),\quad a_i\in[x_{i-1},x_i].$$

Maintenant si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, si D est un domaine du plan xOy. Que représente

$$I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

⋆ Calcul de volume :

I est la mesure du volume limité par le plan xOy, par le cylindre engendré par une droite parallèle à Oz s'appuyant sur le contour de D et par la surface $z=f(x,y)$,

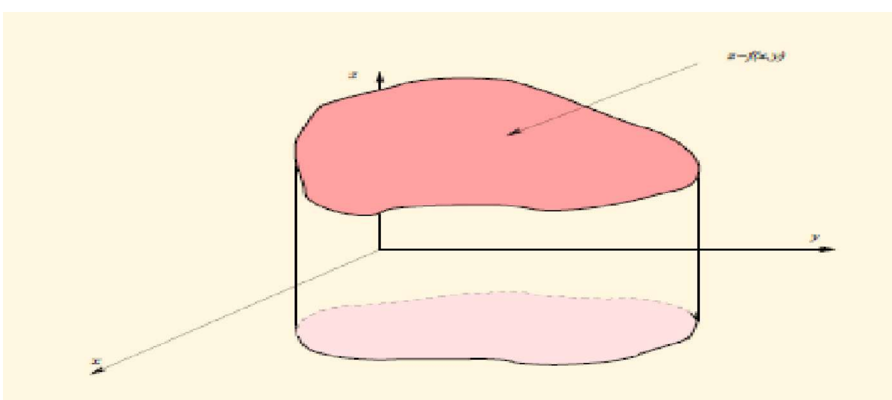

FIG. 4.1 – *Représentation de l'intégrale double sur D.*

⋆ *Calcul d'aire :*

Lorsque, en particulier, $f(x,y) = 1$, $\forall (x,y) \in D$, *cette mesure de volume* $\left(\iint_D dxdy\right)$ *correspond à l'aire de* D *multiplié par* 1, *ce qui permet de calculer l'aire d'un domaine quelconque du plan par :*

$$aire\, D = \iint_D dxdy.$$

4.1 Intégrales doubles

4.1.1 Définition de l'intégrale double sur un rectangle

Soit f *une fonction réelle de deux variables, continue sur un rectangle* $D = [a,b] \times [c,d]$ *de* $\mathbb{R}^2$. *Sa représentation est une surface* S *dans l'espace muni du repère* $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On partage D *en sous-rectangles, dans chaque sous-rectangle* $[x_{i-1},x_i] \times \left[y_{j-1},y_j\right]$. *La somme des volumes des colonnes dont la base est des sous-rectangles et la hauteur* $f(x,y)$ *est une approximation du volume compris entre le plan* $Z = 0$ *et la surface* S. *Lorsque le quadrillage devient suffisamment « fin » pour que la diagonale de chaque sous-rectangle tende vers* 0, *ce volume sera la limite des sommes de Riemann et on le note*

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{1\le i,j\le n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{n}\right).$$

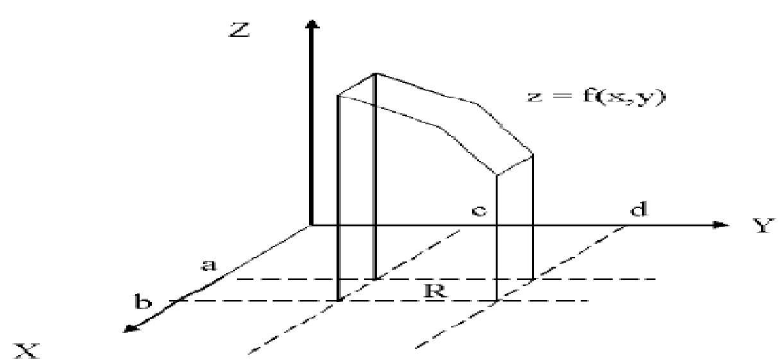

FIG. 4.2 – *Représentation de l'intégrale double sur un rectangle.*

Exemple 4.1 *Pour* $f(x,y) = x$, $D = [0,1] \times [1,2]$,

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dx\,dy &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(1)(1)}{n^2} \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n} f\left(\frac{i}{n}, 1+\frac{j}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n} \frac{i}{n},\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n} i = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{n^2(n+1)}{2}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Théorème 4.1 *Soit* D *un domaine borné de* $\mathbb{R}^2$. *Alors toute fonction continue* $f : D \to \mathbb{R}$ *est intégrable au sens de Riemann.*

4.1.2 Propriétés des intégrales doubles

Linéarité
On suppose que $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ *et* $\iint_D g(x,y)\,dx\,dy$ *existent alors pour tout* $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\iint_D (\lambda f(x,y) + \mu g(x,y))\,dx\,dy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \mu \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

Conservation de l'ordre

$$\text{Si } f \le g \text{ dans } D \text{ alors } \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

Additivité
Si $D = D_1 \cup D_2$ *et* $Aire(D_1 \cap D_2) = 0$, *alors*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Dans tous les cas

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy.$$

4.1.3 Calcul de l'intégrale double sur un rectangle

Théorème 4.2 ***(Théorème de Fubini sur un rectangle)***
Soit f *une fonction continue sur un rectangle* $D = [a,b] \times [c,d]$ *alors on a :*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Exemple 4.2 *Pour* $D = [0,1] \times [0,2]$ *et* $f(x,y) = 2xy$ *alors :*

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^2 2xy\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[xy^2\right]_0^2 dx = \int_0^1 4x\,dx,\\ &= \left[2x^2\right]_0^1 = 2.\end{aligned}$$

Cas particulier : *Si* $f(x,y) = g(x)\,h(y)$ *avec* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $h : [c,d] \to \mathbb{R}$ *sont deux fonctions continues, alors*

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right).$$

Exemple 4.3 *Calculer l'intégrale* $\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin x \cos y\,dxdy$

$$\begin{aligned}\iint_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \sin x \cos y\,dxdy &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)\,dy\right)\\ &= -\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.\end{aligned}$$

4.1.4 Calcul direct de l'intégrale double

Théorème 4.3 ***(Théorème de Fubini)***

Soit f *une fonction continue sur un domaine borné* D *de* $\mathbb{R}^2$*. L'intégrale double* $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ *se calcule de deux façons :*

⋆ *Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme suivante :*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ \ g_1(y) \le x \le g_2(y),\ \ c \le y \le d\right\}.$$

Donc on a

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx.$$

⋆ *Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme suivante :*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ \ f_1(x) \le y \le f_2(x),\ \ a \le x \le b\right\}.$$

Donc on a

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dx\right) dy.$$

Si les deux représentations sont possibles, les deux résultats sont égaux.

Exemple 4.4 .

1) *Calculer l'intégrale* $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right) dxdy$ *avec* D *est le triangle de sommets* $(0,1)$, $(0,-1)$ *et* $(1,0)$.

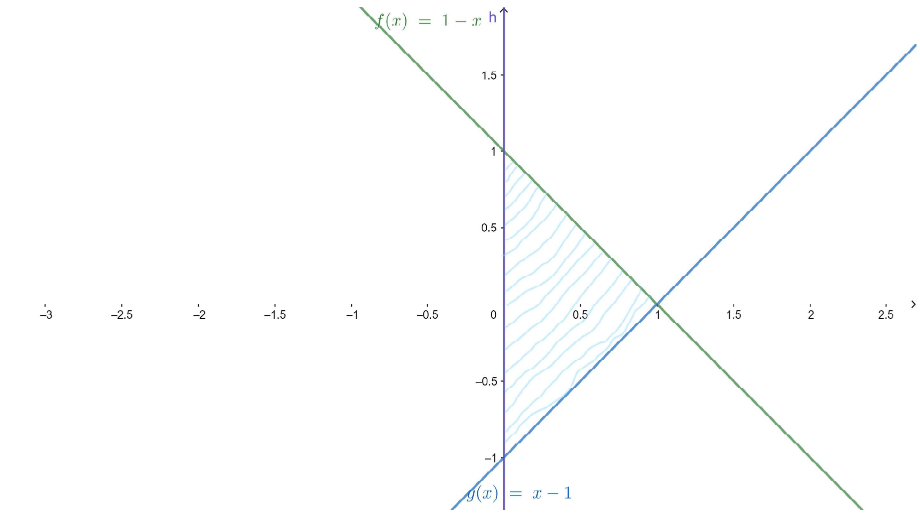

FIG. 4.3 – *Représentation du domaine d'intégration.*

$$\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right) dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} \left(x^2+y^2\right) dy\right) dx = \int_0^1 \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{x-1}^{1-x} dx = \frac{1}{3}.$$

2) *Calculer l'intégrale* $\iint\limits_D \left(2x+5y\right) dxdy$ *avec* $D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2/\ \ 0\leq y\leq 4,\ \ \sqrt{y}\leq x\leq 4\right\}$.

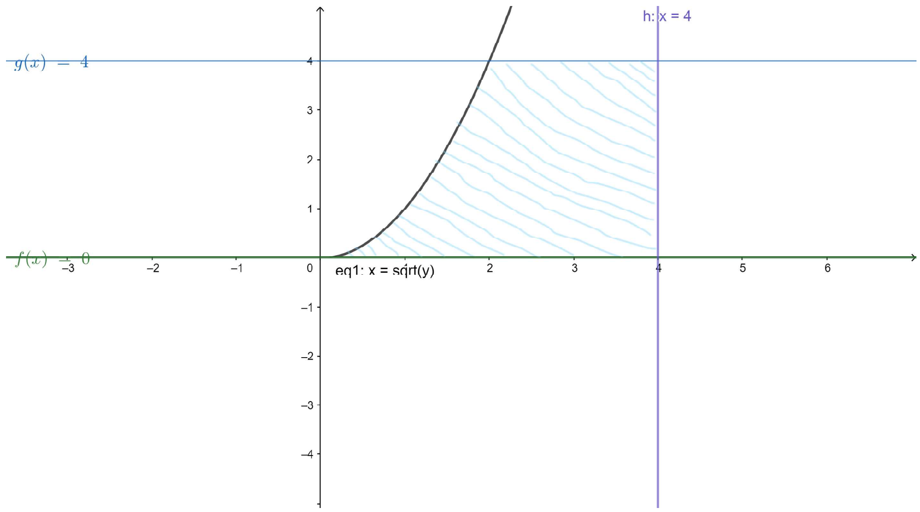

FIG. 4.4 – *Représentation du domaine d'intégration.*

$$\iint_D (2x+5y)\,dxdy = \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{y}}^4 (2x+5y)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[x^2+5xy\right]_{\sqrt{y}}^4 dy = 152.$$

3) *Calculer l'intégrale* $\iint_D (x+2y)\,dxdy$ *sur le domaine* D *formé de la réunion de la partie gauche du disque unité et du triangle de sommets* $(0,1)$, $(0,-1)$ *et* $(2,1)$.

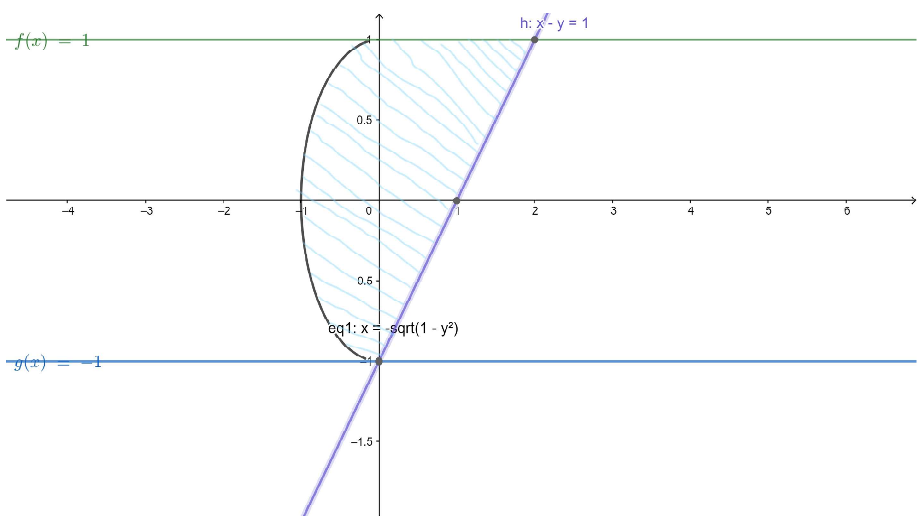

FIG. 4.5 – *Représentation du domaine d'intégration.*

$$\iint_D (x+2y)\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y+1}(x+2y)\,dx\right)dy = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2+2xy\right]_{-\sqrt{1-y^2}}^{y+1}dy = 2.$$

4) *Calculer l'intégrale* $\iint_D e^{x^2}\,dxdy$ *avec* $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ 0\le y\le x\le 1\right\}$.

$$\iint_D e^{x^2}\,dxdy = \int_0^1\left(\int_0^x e^{x^2}\,dy\right)dx = \int_0^1\left[ye^{x^2}\right]_0^x dx = \frac{e-1}{2}.$$

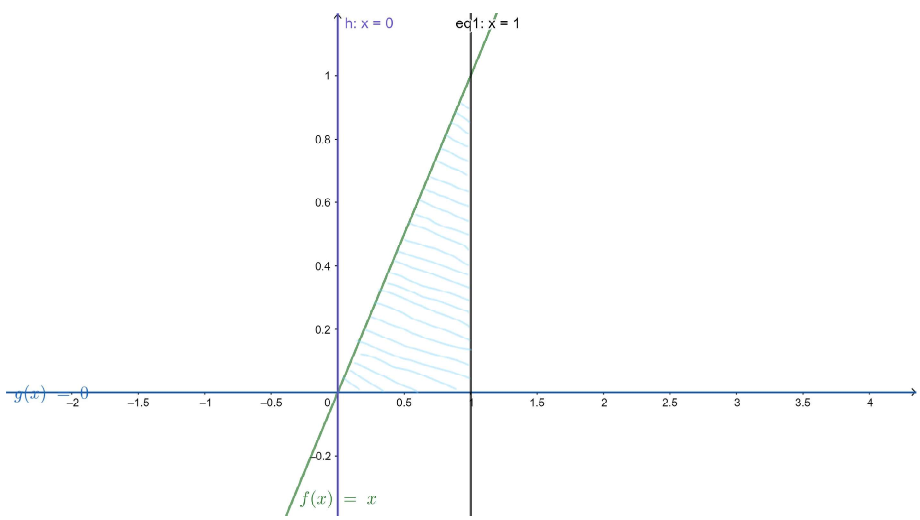

FIG. 4.6 – *Représentation du domaine d'intégration.*

5) *Calculer l'intégrale*

$$\int_0^4 \left(\int_{2x}^{8} \sin\left(y^2\right) dy \right) dx = \int_0^8 \left(\int_0^{\frac{y}{2}} \sin\left(y^2\right) dx \right) dy = \frac{1}{4} \int_0^8 2y \sin\left(y^2\right) dy = \frac{1 - \cos(64)}{4}.$$

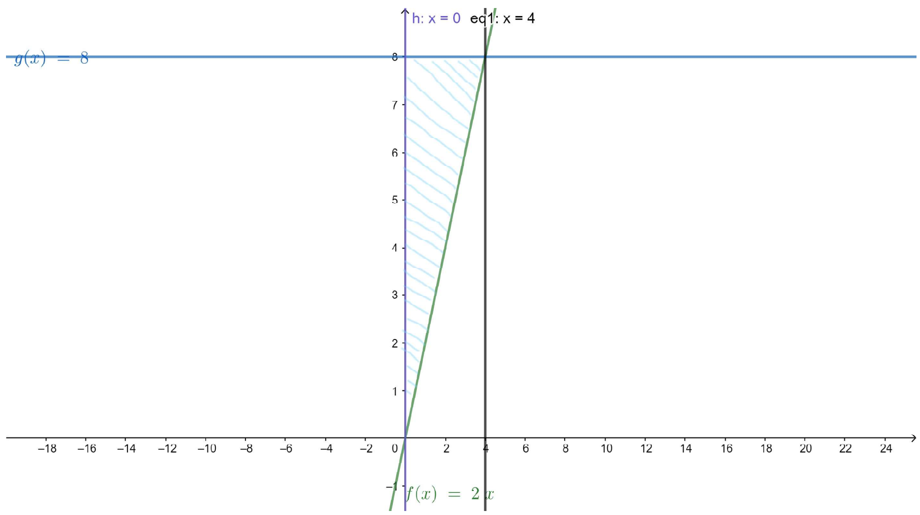

FIG. 4.7 – *Représentation du domaine d'intégration.*

6) *Calculer l'intégrale* $\iint\limits_D (1+x)\,dx\,dy$ *avec* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ y \geq |x|,\, 2y \leq x+4\right\}$.

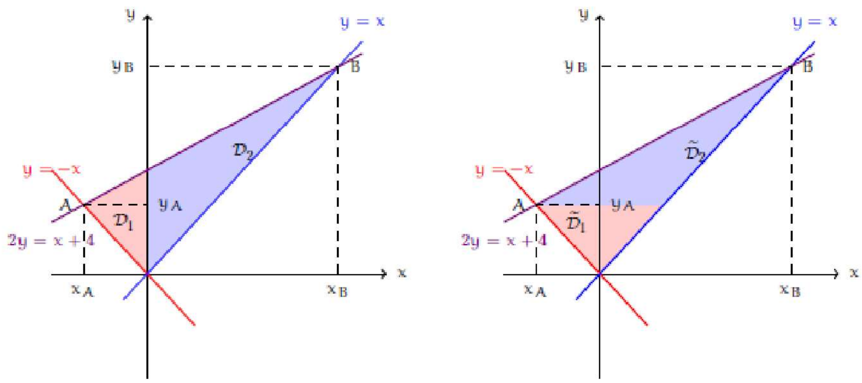

FIG. 4.8 – *Représentation du domaine d'intégration et division du domaine D en deux sous domaines.*

***Première méthode**: On divise le domaine D en deux sous domaines D_1 et D_2*

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ \frac{-4}{3} \leq x \leq 0,\ -x \leq y \leq \frac{1}{2}(x+4)\right\}.$$

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ 0 \leq x \leq 4,\ x \leq y \leq \frac{1}{2}(x+4)\right\}.$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D (1+x)\,dx\,dy &= \int_{\frac{-4}{3}}^{0}\left(\int_{-x}^{\frac{1}{2}(x+4)} (1+x)\,dy\right)dx + \int_0^4\left(\int_x^{\frac{1}{2}(x+4)} (1+x)\,dy\right)dx,\\
&= \int_{\frac{-4}{3}}^{0} [y+xy]_{-x}^{\frac{1}{2}(x+4)}\,dx + \int_0^4 [1+x]_x^{\frac{1}{2}(x+4)}\,dx,\\
&= \int_{\frac{-4}{3}}^{0}\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 2\right)dx + \int_0^4\left(\frac{-1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2\right)dx,\\
&= \left[\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 + 2x\right]_{\frac{-4}{3}}^{0} + \left[\frac{-1}{6}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 2x\right]_0^4,\\
&= \frac{20}{27} + \frac{28}{3} = \frac{272}{27}.
\end{aligned}$$

Deuxième méthode *: On divise le domaine D en deux sous domaines $\tilde{D}_1$ et $\tilde{D}_2$*

$$\tilde{D}_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \le y \le \frac{4}{3}, \ -y \le x \le y \right\}.$$

$$\tilde{D}_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \frac{4}{3} \le y \le 4, \ 2y-4 \le x \le y \right\}.$$

Donc nous avons

$$\begin{aligned}
\iint_D (1+x)\,dxdy &= \int_0^{\frac{4}{3}} \left(\int_{-y}^{y} (1+x)\,dx \right) dy + \int_{\frac{4}{3}}^{4} \left(\int_{2y-4}^{y} (1+x)\,dx \right) dy, \\
&= \int_0^{\frac{4}{3}} \left[x + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-y}^{y} dy + \int_{\frac{4}{3}}^{4} \left[x + \frac{1}{2}x^2 \right]_{2y-4}^{y} dy, \\
&= \left[y^2 \right]_0^{\frac{4}{3}} + \left[\frac{-1}{2}y^3 + \frac{7}{2}y^2 - 4y \right]_{\frac{4}{3}}^{4}, \\
&= \frac{16}{9} + \frac{224}{27} = \frac{272}{27}.
\end{aligned}$$

4.2 Changement de variables dans une intégrale double

4.2.1 Formule de changement de variables

Pour toute fonction intégrable sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et dans ce cas on écrit les variables (x,y) en fonction des nouvelles variables : φ une fonction de classe C^1 définie par

$$\varphi : D' \to D$$

$$(u,v) \to \varphi(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v) \right),$$

telle que $\varphi\left(D'\right) = D$ et que le Jacobien de cette transformation soit différent de zéro. i.e

$$J_\varphi(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0.$$

La formule de changement de variables nous donne :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f\left(x(u,v), y(u,v) \right) |J_\varphi(u,v)|\,dudv,$$

où D' est le nouveau domaine contenu dans le plan $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et

$$J_\varphi(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right|.$$

Exemple 4.5 *Calculer* $\iint_D (x-1)^2\,dxdy$ *avec* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ -1 \le x+y \le 1,\ -2 \le x-y \le 2\right\}$.

En effectuant le changement de variable $u = x+y$, $v = x-y$. Le nouveau domaine $D' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ -1 \le u \le 1,\ -2 \le v \le 2\right\}$, on a aussi $x = \frac{u+v}{2}$, $v = \frac{u-v}{2}$. Le Jacobien de cette transformation

$$J_\varphi(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \left| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{matrix} \right|.$$

La formule de changement de variables nous donne :

$$\begin{aligned} \iint_D (x-1)^2\,dxdy &= \iint_{D'} (u+v-2)^2 \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} (u+v-2)^2\,dudv, \\ &= \frac{1}{24}\int_{-2}^{2} \left[(u+v-2)^3\right]_{-1}^{1} dv = \frac{1}{24}\int_{-2}^{2} \left((v-1)^3-(v-3)^3\right) dv, \\ &= \frac{1}{96}\left[(v-1)^4-(v-3)^4\right]_{-2}^{2} = -\frac{81}{96}+\frac{625}{96} = \frac{17}{3}. \end{aligned}$$

4.2.2 Changement de variable en coordonnées polaires

Soient f une fonction continue sur un domaine bornéD de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $(r,\theta) \to \left(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta\right)$. Alors φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et son jacobien vaut :

$$|\det J_\varphi(r,\theta)| = \left| \begin{matrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{matrix} \right|. = |r|.$$

$$\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \quad (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D\right\}.$$

Et donc la formule d'intégration en coordonnées polaires est donnée par :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Exemple 4.6 .

1) *Calculer en coordonnées polaires* $\iint_D xy\,dxdy$ *avec* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0 \le x \le y,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \quad (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D\right\}, \\
&= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \ 0 \le r\cos\theta \le r\sin\theta,\ 1 \le r^2 \le 4\right\}, \\
&= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \ 1 \le r \le 2,\ \cos\theta \ge 0,\ \sin\theta \ge 0,\ \tan\theta \ge 1\right\}, \\
&= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \ 1 \le r \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dx\,dy &= \iint_\Delta r^2\cos\theta\sin\theta.r\,dr\,d\theta = \iint_\Delta r^3\cos\theta\sin\theta\,dr\,d\theta \\
&= \left(\int_1^2 r^3\,dr\right)\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\,d\theta\right) = \left(\left[\frac{1}{4}r^4\right]_1^2\right)\left(\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \left(4-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{16}.
\end{aligned}$$

2) *Calculer en coordonnées polaires* $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ *avec* $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \ge 0,\ x \ge 0,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \quad (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D\right\}, \\
&= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \ r\cos\theta \ge 0,\ r\sin\theta \ge 0,\ 1 \le r^2 \le 4\right\}, \\
&= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \ 1 \le r \le 2,\ \cos\theta \ge 0,\ \sin\theta \ge 0\right\}, \\
&= \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 / \ 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\,dx\,dy &= \iint_\Delta \frac{1}{r^2}.r\,dr\,d\theta = \iint_\Delta \frac{1}{r}\,dr\,d\theta = \left(\int_1^2 \frac{1}{r}\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) \\
&= = \left([\ln(r)]_1^2\right)\left([\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = (\ln(2))\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ln(2).
\end{aligned}$$

CHAPITRE 5

Équations différentielles

*C'est au XVIIe siècle avec la dérivation et l'intégration de Newton et Leibniz qu'apparait la notion d'**équations différentielles**. Elles sont issues de problèmes de géométrie et de mécanique. Il faut attendre le XVIIIe siècle pour voir les premières méthodes classiques de résolution.*

*Avec le développement des sciences, la résolution des **équations différentielles** devient une branche importante des mathématiques et interviennent dans de nombreux domaines dont l'astronomie, l'économie et la physique.*

5.1 Définitions générales

Définition 5.1 *Une **équation différentielle** est une équation :*

⋆ *dont l'inconnue est une fonction (généralement notée $y(x)$ ou simplement y).*

⋆ *dans laquelle apparaissent certaines des dérivées de la fonction (dérivée première y', ou dérivées d'ordres supérieurs y'', $y^{(3)}$,...).*

Exemple 5.1 .

1) $y' = \sin x$ *est une EDO d'ordre un.*

2) $y'' = y$ *est une EDO d'ordre deux.*

Définition 5.2 *Une **équation différentielle** d'ordre n est une équation de la forme*

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables.

*Une **solution** d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation* (1).

Exemple 5.2 .

• *Considérons l'équation différentielle: $y'' + y = 0$ est une EDO d'ordre deux. $y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$ avec C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ est solution de cette équation :*

$$y' = C_1 \cos(x) - C_2 \sin(x).$$

$$y'' = -C_1 \sin(x) - C_2 \cos(x) = -y.$$

Par conséquent on a

$$y'' + y = 0.$$

5.2 Notions générales sur les équations différentielles du premier ordre

Définition 5.3 *Une **équation différentielle** du premier ordre est une équation de la forme :*

$$F\left(x,y,y^{'}\right) = 0. \tag{2}$$

*On dit que l'**équation différentielle** du premier ordre* (2) *est résoluble en $y^{'}$, lorsqu'on peut mettre cette équation sous la forme*

$$y^{'} = g\left(x,y\right).$$

Exemple 5.3 .
• *l'**équation différentielle** du premier ordre $xy^{'} + y = 0$ est résoluble en $y^{'}$, car on a :*

$$xy^{'} + y = 0 \implies xy^{'} = -y \implies y^{'} = -\frac{y}{x}, \text{ avec } x \neq 0.$$

5.2.1 Existence et unicité des solutions des équations différentielles du premier ordre résolubles en $\mathbf{y}^{'}$

Théorème 5.1 *(**Théorème de Cauchy**)*
*Considérons l'**équation différentielle** du premier ordre résoluble en $y^{'}$:*

$$y^{'} = g\left(x,y\right). \tag{3}$$

On suppose que la fonction $g\left(x,y\right)$ et sa dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial y}$ par rapport à y sont continues dans un certain domaine D du plan xOy. Soit $\left(x_0,y_0\right) \in D$. Alors il existe une
solution unique $y = f\left(x\right)$ de l'équation différentielle (3)*, satisfaisant à la condition $y = y_0$ lorsque $x = x_0$.*

Remarque 5.1 .
⋆ *Il résulte de ce théorème que l'équation* (3) *possède une infinité de solutions différentes par exemple, la solution passant par le point $\left(x_0,y_0\right)$; la solution passant par le point $\left(x_0,y_1\right)$; celle passant par le point $\left(x_0,y_2\right)$, etc... pourvu que ces points se trouvent dans le domaine D.*
⋆ *La condition que la fonction $y = y_0$ lorsque $x = x_0$ s'appelle condition initiale de de l'équation différentielle* (3)*. Souvent on l'écrit sous la forme*

$$y\underset{x=x_0}{|} = y_0.$$

Exemple 5.4 *Considérons l'équation différentielle suivante*

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{4}$$

On a

$$g(x,y) = -\frac{y}{x},\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{x}.$$

Il est clair que les fonctions $g(x,y)$ *et* $\frac{\partial g}{\partial y}$ *sont continues dans l'ensemble* D *suivant :*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ x \neq 0,\ y \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}.$$

D est le domaine du plan xOy, privé de l'axe des y. D'après le théorème de Cauchy, et pour tout point $(x_0, y_0) \in D$, il existe une fonction unique $y = f(x)$ de l'équation différentielle (4) *et passant par le point (x_0, y_0), c'est à dire que $f(x_0) = y_0$.*

5.2.1.1 Solution générale. Solution particulière

Définition 5.4 *On appelle solution générale d'une équation différentielle du premier ordre une fonction*

$$y = f(x, C),$$

dépendant d'une constante arbitraire C et satisfaisant aux conditions suivantes :

- *Elle satisfait à l'équation différentielle quelle que soit la valeur concrète de la constante C.*
- *Quelle que soit la condition initiale $y = y_0$ lorsque $x = x_0$, on peut trouver une valeur $C = C_0$ telle que la fonction $y = f(x, C_0)$ vérifie la condition initiale donnée. On suppose alors que les valeurs x_0 et y_0 appartiennent au domaine des variations des variables x et y dans lesquels sont observées les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution.*

Exemple 5.5 *Considérons l'équation différentielle suivante*

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{5}$$

La fonction

$$y = \frac{C}{x},$$

est solution générale de l'équation différentielle (5). *En effet, $y = \frac{C}{x}$ vérifie les deux conditions*

- $$y = \frac{C}{x} \Longrightarrow y' = -\frac{C}{x^2},$$

$$y = \frac{C}{x} \Longrightarrow -\frac{y}{x} = -\frac{C}{x^2}.$$

Donc

$$\forall C \in \mathbb{R},\ y^{'} = -\frac{y}{x}.$$

• *Soit*

$$\left(x_0, y_0\right) \in D \Longrightarrow x_0 \neq 0,\ y_0 \in \mathbb{R}.$$

Considérons l'équation différentielle

$$y_0 = \frac{C}{x_0} \Longrightarrow C = x_0.y_0.$$

Si on pose $C = x_0.y_0$, *alors*

$$y = \frac{x_0.y_0}{x} \text{ vérifie } f\left(x_0\right) = y_0.$$

Définition 5.5 *On appelle solution particulière toute fonction*

$$y = f\left(x, C_0\right),$$

déduite de la solution générale $y = f(x, C)$ *en posant dans cette dernière* $C = C_0$.

Exemple 5.6 *Revenons à l'équation du premier ordre* (5) *:*

$$y^{'} = -\frac{y}{x}.$$

On a vu que cette équation a pour solution générale une famille de fonctions $y = \frac{C}{x}$.

Cherchons la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales $y_0 = 1$ *lorsque* $x_0 = 2$, *Substituant ces valeurs dans la formule* $y = \frac{C}{x}$ *on obtient* $C = 2$. *La solution particulière cherchée est donc la fonction*

$$y = \frac{2}{x}.$$

Remarque 5.2 *Résoudre ou intégrer une équation différentielle consiste à :*

⋆ *chercher sa solution générale ou son intégrale générale (si les conditions initiales ne sont pas données).*

⋆ *chercher la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales (s'il y en a).*

5.3 Équations différentielles à variables séparées et séparables

5.3.1 Équations différentielles à variables séparées

Considérons une équation de la forme :

$$y' = f(x).g(y). \tag{6}$$

où $f(x)$ dépend seulement de x et $g(y)$ dépend seulement de y. Donc l'équation (6) *devient*

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

Si on intègre le premier membre par rapport à y et le second par rapport à x, on obtient :

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

La relation suivante est l'intégrale générale de l'équation différentielle (6)*, c'est à dire une relation implicite qui relie la solution y, la variable x, et une constante C.*

Remarque 5.3 .

⋆ *Il n'est pas toujours possible de trouver explicitement la solution y par des fonctions élémentaires connues. On réussit seulement à établir une relation implicite qui relie la solution y, la variable x, et une constante C.*

⋆ *L'équation suivante $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$ peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0.$$

Définition 5.6 *On appelle équation différentielle à variables séparées, une équation qui s'écrit sous la forme suivante :*

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0. \tag{7}$$

L'intégrale générale de l'équation (7) *est :*

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C. \tag{8}$$

Exemple 5.7 *Considérons l'équation à variables séparées suivante :*

$$\frac{x}{2}dx + \frac{y}{2}dy = 0.$$

Son intégrale générale est :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = C_1.$$

ou encore

$$x^2 + y^2 = C \text{ avec } C = 4C_1.$$

5.3.2 Équations différentielles à variables séparables

Définition 5.7 *On appelle équation différentielle à variables séparables, une équation de la forme suivante :*

$$M_1(x).N_1(y)\,dx + M_2(x).N_2(y)\,dy = 0. \tag{9}$$

Proposition 5.1 *Toute équation différentielle à variables séparables peut être transformée en une équation différentielle à variables séparées.*

Preuve. *Divisons les deux membres de* (9) *par l'expression* $M_2(x).N_1(y)$*, on obtient :*

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0. \tag{10}$$

L'équation (10) *est une équation différentielle à variables séparées.* ■

Exemple 5.8 .

1) *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$xy' = 1.$$

Séparons les variables, on obtient :

$$\int dy = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Donc

$$y = \ln|x| + C, \ \ C \in \mathbb{R}.$$

2) *Considérons l'équation différentielle à variables séparables :*

$$(1+x).y.dx + (1-y).x.dy = 0.$$

Divisons les deux membres par l'expression : $x.y$*, on obtient :*

$$\int \frac{(1+x)}{x}dx + \int \frac{(1-y)}{y}dy = C.$$

On obtient en intégrant :

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C.$$

ou encore

$$\ln|x.y| + x - y = C.$$

qui est l'intégrale générale de l'équation différentielle.

5.4 Équations différentielles homogènes du premier ordre

Définition 5.8 *on dit que la fonction $f(x,y)$ est une fonction homogène de degré n par rapport aux variables x et y si pour tout λ on a :*

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{n} f(x,y). \tag{11}$$

Exemple 5.9 .

1) *Soit la fonction $f(x,y)=\sqrt[3]{x^{3}+y^{3}}$, on a*

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt[3]{(\lambda x)^{3}+(\lambda y)^{3}}=\lambda\sqrt[3]{x^{3}+y^{3}}=\lambda f(x,y).$$

Donc la fonction est homogène de degré 1.

2) *Soit la fonction $f(x,y)=\frac{x^{2}-y^{2}}{xy}$, on a*

$$f(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^{2}-(\lambda y)^{2}}{\lambda^{2}xy}=\frac{x^{2}-y^{2}}{xy}=\lambda^{0}.f(x,y).$$

Donc la fonction est homogène de degré 0.

Définition 5.9 *L'équation différentielle du premier ordre*

$$y^{'}=f(x,y). \tag{12}$$

est dite homogène par rapport à x et y si la fonction $f(x,y)$ est une fonction homogène de degré 0 *par rapport à x et y.*

5.4.1 Résolution de l'équation différentielle homogène

On a par hypothèse $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$. Posant dans cette identité $\lambda=\frac{1}{x}$, on obtient :

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right),$$

Donc une fonction homogène de degré 0 *dépend seulement du rapport $\frac{y}{x}$. L'équation* (12) *s'écrit alors sous la forme suivante :*

$$y^{'}=f\left(1,\frac{y}{x}\right). \tag{13}$$

Faisons la substitution :

$$u=\frac{y}{x},\text{ c'est a dire } y=ux.$$

On a alors

$$y^{'} = u^{'}x + u.$$

Substituant cette expression de la dérivée dans l'équation (13)*, on obtient*

$$u^{'}x + u = f(1,u). \tag{14}$$

C'est une équation à variables séparables :

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

On trouve par intégration

$$\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

on obtient l'intégrale de l'équation (13).

Exemple 5.10 .

1) *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$y^{'} = \frac{xy - y^2}{x^2}. \tag{15}$$

On a

$$f(x,y) = \frac{xy - y^2}{x^2}.$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 xy - \lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2} = \frac{xy - y^2}{x^2} = \lambda^0 . f(x,y).$$

Donc l'équation différentielle est homogène.
On pose $u = \frac{y}{x}$, alors

$$y = ux, \quad y^{'} = u^{'}x + u.$$

On remplace dans (15)

$$u^{'}x + u = \frac{ux^2 - (ux)^2}{x^2} = u - u^2 \Longrightarrow u^{'}x = -u^2 \Longrightarrow -\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

On trouve par intégration

$$\int -\frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \frac{1}{u} = \ln|x| + C \Longrightarrow u = \frac{1}{\ln|x| + C}.$$

On remplace $u = \frac{y}{x}$, on obtient l'intégrale générale de l'équation différentielle initiale

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\ln|x| + C} \Longrightarrow y = \frac{x}{\ln|x| + C}.$$

2) *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$y^{'} = \frac{y^2 - x\sqrt{x^2 - y^2}}{xy}. \tag{16}$$

5.5 Équations différentielles se ramenant aux équations différentielles homogènes

Se ramènent aux équations différentielles homogènes, les équations différentielles de la forme suivante :

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}. \tag{17}$$

Si $c_1 = c_2 = 0$, *l'équation* (17) *est évidemment homogène. supposons maintenant que* c_1 *et* c_2 *(ou l'un deux) ne soient pas nuls.*

• *Pour* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, *on pose* $x = X + a$ *et* $y = Y + b$. *Alors* $y' = Y'$.

$$Y' = \frac{a_1(X+a) + b_1(Y+b) + c_1}{a_2(X+a) + b_2(Y+b) + c_2} = \frac{a_1X + b_1Y + a_1a + b_1b + c_1}{a_2X + b_2Y + a_2a + b_2b + c_2}. \tag{18}$$

Choisissons a et b de manière qu'ils vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} a_1a + b_1b + c_1 = 0 \\ a_2a + b_2b + c_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = ? \\ b = ? \end{cases}. \tag{19}$$

$$Y' = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y} \text{ résolution d'une équation homogène.}$$

• *Pour* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, *on écrit* $a_1x + b_1y + c_1 = m\left(a_2x + b_2y + c_2\right) + n$.

On pose

$$u = a_2x + b_2y + c_2 \Longrightarrow u' = a_2 + b_2y'.$$

Donc on trouve

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = \frac{m\left(a_2x + b_2y + c_2\right) + n}{a_2x + b_2y + c_2} \Longrightarrow \frac{u' - a_2}{b_2} = \frac{mu + n}{u}.$$

qui est une équation à variables séparables.

Exemple 5.11 .

1) *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$\left(x + y - 3\right)dx + \left(x - y + 1\right)dy = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x - y + 3}{x - y + 1} \Longrightarrow y' = \frac{-x - y + 3}{x - y + 1}.$$

$\left|\begin{array}{cc}-1 & -1\\ 1 & -1\end{array}\right| = 2 \neq 0 \implies$ *on pose* $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \\ y' = Y' \end{cases}$ *, telle que a,b vérifient :*

$$\begin{cases} -a-b+3=0\ldots(1) \\ a-b+1=0\ldots(2) \end{cases} \implies (1)+(2) \quad -2b+4=0 \implies \begin{cases} b=2 \\ a=1 \end{cases}.$$

Alors $Y' = \frac{-X-Y}{X-Y} \implies$ *l'équation différentielle est homogène. On pose*

$$u = \frac{Y}{X},\ Y = u.X \implies Y' = u + Xu'.$$

Donc on obtient

$$u + Xu' = \frac{-X-uX}{X-uX} = \frac{-1-u}{1-u}.$$

$$Xu' = \frac{-1-u}{1-u} - u = \frac{u^2-2u-1}{1-u} \implies \frac{1-u}{u^2-2u-1}du = \frac{1}{X}dX.$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2u-2}{u^2-2u-1}du = \int \frac{1}{X}dX \implies -\frac{1}{2}\ln|u^2-2u-1| = \ln|X| + C.$$

$$\ln|u^2-2u-1| = -2\ln|X| - 2C \implies \ln|u^2-2u-1| = \ln\frac{1}{X^2} + C_1,\ C_1 = -2C.$$

$$u^2-2u-1 = C_2.\frac{1}{X^2},\ C_2 = e^{C_1}.$$

$$\left(\frac{Y}{X}\right)^2 - 2\left(\frac{Y}{X}\right) - 1 = C_2.\frac{1}{X^2}.$$

$$\left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2 - 2\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - 1 = C_2.\frac{1}{(x-1)^2}.$$

2) *Soit l'équation différentielle suivante :*

$$y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}.$$

$\left|\begin{array}{cc}2 & 1\\ 4 & 2\end{array}\right| = 0 \implies 2x+y-1 = \frac{1}{2}\left(4x+2y+5\right) - \frac{7}{2}.$

$$y' = \frac{\frac{1}{2}\left(4x+2y+5\right) - \frac{7}{2}}{4x+2y+5}. \tag{20}$$

On pose $u = 4x+2y+5 \implies u' = 4+2y'.$

On remplace dans (20) *:*

$$\frac{u^{'}-4}{2}=\frac{u-7}{2u}\Longrightarrow u^{'}=\frac{5u-7}{u}.$$

$$\frac{u}{5u-7}du=dx\Longrightarrow\int\frac{u}{5u-7}du=\int dx.$$

$$\frac{1}{5}\int\frac{u-\frac{7}{5}+\frac{7}{5}}{u-\frac{7}{5}}du=\int dx\Longrightarrow\frac{1}{5}\int 1du+\frac{1}{5}\int\frac{\frac{7}{5}}{u-\frac{7}{5}}du=\int dx.$$

$$\frac{1}{5}u+\frac{7}{25}\ln|u-\frac{7}{5}|=x+c.$$

$$\frac{1}{5}\left(4x+2y+5\right)+\frac{7}{25}\ln|4x+2y+\frac{18}{5}|=x+c.$$

5.6 Équation différentielle linéaire

On ne sait pas résoudre toutes les équations différentielles. On se concentre dans ce chapitre sur deux types d'équations : les équations différentielles linéaires du premier ordre et celles du second ordre à coefficients constants.

⋆ *Une équation différentielle d'ordre n est **linéaire** si elle est de la forme :*

$$a_0(x)\,y+a_1(x)\,y^{'}+\ldots+a_n(x)\,y^{(n)}=g(x),$$

où les a_i et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$. Le terme linéaire signifie qu'il n'y a pas d'exposant pour les termes y, $y^{'}$, $y^{''}$,...

⋆ *Une équation différentielle linéaire est **homogène**, ou **sans second membre**, si la fonction g ci-dessus est la fonction nulle :*

$$a_0(x)\,y+a_1(x)\,y^{'}+\ldots+a_n(x)\,y^{(n)}=0.$$

⋆ *Une équation différentielle linéaire est à **coefficients constants** si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes :*

$$a_0y+a_1y^{'}+\ldots+a_ny^{(n)}=g(x),$$

où les a_i sont des constantes réelles et g une fonction continue.

Exemple 5.12 .

1) $y^{'}+4xy=e^{x}$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.*

2) $y^{'}+4xy=0$ *est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.*

3) $3y^{''}-2y^{'}+4y=0$ *est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre.*

4) $y^{'2}-y=2x$ *n'est pas une équation différentielle linéaire.*

Proposition 5.2 ***(Principe de linéarité)***
Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle linéaire homogène suivante :

$$a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' + \ldots + a_n(x)\, y^{(n)} = 0. \tag{21}$$

alors, quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de cette équation.

Pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre

$$a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' + \ldots + a_n(x)\, y^{(n)} = g(x), \tag{22}$$

on décompose souvent la résolution en deux étapes :
- *trouver une solution particulière y_0 de l'équation* (22),
- *trouver l'ensemble Φ des solutions y de l'équation homogène associée*

$$a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' + \ldots + a_n(x)\, y^{(n)} = 0. \tag{23}$$

ce qui permet de trouver toutes les solutions de (22).

Proposition 5.3 ***(Principe de superposition)***
l'ensemble des solutions Φ de (22) *est formé des*

$$y + y_0 \quad avec \quad y \in \Phi.$$

Autrement dit, on trouve toutes les solutions en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène. C'est une conséquence immédiate du caractère linéaire des équations.

5.6.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 5.10 *Une équation différentielle* **linéaire du premier ordre** *est une EDO du type :*

$$y' = a(x)\, y + b(x), \tag{24}$$

où a et b sont des fonctions définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
On peut envisager la forme :

$$a(x)\, y' + b(x)\, y = c(x),$$

où a, b et c sont des fonctions définies et continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, avec $a \neq 0$ pour tout $x \in I$. La division par $a(x)$ permet de retrouver la forme (24).

On va commencer par résoudre le cas où a est une constante et $b = 0$. Puis a sera une fonction (et toujours $b = 0$). On terminera par le cas général où a et b sont deux fonctions.

5.6.1.1 $y^{'} = ay$

Théorème 5.2 *Soit a une constante réel. Soit l'équation différentielle :*

$$y^{'} = ay. \tag{25}$$

Les solutions de (25)*, sur* $\mathbb{R}$*, sont les fonctions y définies par :*

$$y = Ce^{ax},$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Preuve. *On réécrit l'équation différentielle sous la forme :*

$$\frac{y^{'}}{y} = a,$$

que l'on intègre pour trouver :

$$\int \frac{dy}{y} = \int a dx \Longrightarrow \ln|y| = ax + c.$$

On compose par l'exponentielle des deux côtés pour obtenir :

$$y = Ce^{ax}, \text{ avec } C = \pm e^{c}.$$

■

Exemple 5.13 *Résoudre l'équation différentielle :*

$$3y^{'} - 5y = 0.$$

On écrit cette équation sous la forme : $y^{'} = \frac{5}{3}y$. Ses solutions, sur $\mathbb{R}$, sont donc de la forme : $y = Ce^{\frac{5}{3}x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Remarque 5.4 .

⋆ *L'équation différentielle* (25) *admet donc une infinité de solutions (puisque l'on a une infinité de choix de la constante C).*

⋆ *La constante C peut être nulle. Dans ce cas, on obtient $y = 0$ sur $\mathbb{R}$, qui est une solution évidente de l'équation différentielle.*

5.6.1.2 $y^{'} = a(x)\,y$

Théorème 5.3 *Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a. Soit l'équation différentielle :*

$$y^{'} = a(x)\,y. \tag{26}$$

Les solutions sur I de (26) sont les fonctions y définies par :

$$y(x) = Ce^{A(x)},$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Preuve. *Une preuve rapide est la suivante :*

$$\frac{y^{'}}{y} = a(x) \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx,$$

$$\ln|y| = A(x) + c \Longrightarrow y = Ce^{A(x)} \text{ avec } C = \pm e^{c}.$$

■

Exemple 5.14 *Résoudre l'équation différentielle sur $I =]0, +\infty[$:*

$$x^2 y^{'} = y \Longrightarrow y^{'} = \frac{1}{x^2} y.$$

Donc

$$a(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{sa primitive est } A(x) = -\frac{1}{x}.$$

Ainsi les solutions cherchées sont

$$y(x) = Ce^{-\frac{1}{x}} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

5.6.1.3 $y^{'} = a(x)\,y + b(x)$

Il nous reste le cas général de l'équation différentielle linéaire d'ordre un avec second membre :

$$y^{'} = a(x)\,y + b(x), \tag{27}$$

où $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.
À L'EDO (27) ,on associe une EDO dite équation homogène associée

$$y^{'} = a(x)\,y. \tag{28}$$

Proposition 5.4 .
Si y_0 est une solution de (27), alors les solutions de (27) sont les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ définies par :

$$y_0 + Ce^{A(x)} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$.

Recherche d'une solution particulière : méthode de variation de la constante.

C'est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitive.

La solution générale de (28) $y' = a(x)y$ *est donnée par* $y(x) = Ce^{A(x)}$*, avec* $C \in \mathbb{R}$*. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme :*

$$y_0(x) = C(x)\, e^{A(x)}.$$

où C *est maintenant une fonction à déterminer pour que* y_0 *soit une solution de* (27).

On a

$$y_0'(x) = C'(x)\, e^{A(x)} + a(x)\, C(x)\, e^{A(x)} = C'(x)\, e^{A(x)} + a(x)\, y_0(x),$$

$$y_0'(x) - a(x)\, y_0(x) = C'(x)\, e^{A(x)}.$$

Donc y_0 *est une solution de* (27) *si et seulement si*

$$C'(x)\, e^{A(x)} = b(x) \Longrightarrow C'(x) = b(x)\, e^{-A(x)} \Longrightarrow C(x) = \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx.$$

Ce qui donne une solution particulière de (27) *sur* I *:*

$$y_0(x) = \left(\int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx \right) e^{A(x)}.$$

La solution générale de (27) *est donnée par :*

$$y(x) = \left(\int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx \right) e^{A(x)} + Ce^{A(x)}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 5.15 *Soit équation différentielle linéaire d'ordre un suivante :*

$$y' + 3x^2 y = 6x^2. \tag{29}$$

$\star$ *On commence par résoudre l'équation homogène associée :*

$$y' + 3x^2 y = 0,$$

ce qui nous donne :

$$y(x) = Ce^{-x^3}, \ C \in \mathbb{R}.$$

$\star$ *Pour résoudre l'équation avec second membre on utilise la méthode de la variation de la constante, ce qui nous donne :*

$$y_0(x) = C(x)\, e^{-x^3}$$

On a

$$y_0'(x) = C'(x)\, e^{-x^3} - 3x^2 C(x)\, e^{-x^3} = C'(x)\, e^{-x^3} - 3x^2 y_0(x).$$

$$y_0'(x) + 3x^2 y_0(x) = C'(x)\, e^{-x^3}.$$

Donc y_0 est une solution de (29) *si et seulement si*

$$C'(x)\, e^{-x^3} = 6x^2 \Longrightarrow C'(x) = 6x^2 e^{x^3} \Longrightarrow C(x) = \int 6x^2 e^{x^3} dx = 2e^{x^3}.$$

Ce qui donne une solution particulière de (29) *:*

$$y_0(x) = 2.$$

La solution générale de (29) *est donnée par :*

$$y(x) = 2 + Ce^{-x^3},\ C \in \mathbb{R}.$$

La méthode $y = u(x).v(x)$

Nous allons chercher la solution de l'équation (27) *sous la forme de produit de deux fonctions en x :*

$$y = u(x).v(x). \tag{30}$$

On pourra prendre arbitrairement l'une de ces fonctions, l'autre sera définie alors par (30)*. Dérivons les deux membres de l'égalité* (30)*, on trouve :*

$$y' = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}.$$

Substituant l'expression de la dérivée y' obtenue dans l'équation (27)*, on aura*

$$u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx} = a(x).u.v + b(x),$$

ou

$$u.\left(\frac{dv}{dx} - a(x).v\right) + v.\frac{du}{dx} = b(x). \tag{31}$$

Choisissons la fonction v de sorte que l'on ait

$$\frac{dv}{dx} - a(x).v = 0. \tag{32}$$

Séparant les variables dans cette équation différentielle en v, on trouve :

$$\frac{dv}{v} = a(x)\, dx.$$

On obtient en intégrant

$$\int \frac{dv}{v} = \int a(x)\, dx \Longrightarrow \ln|v| = \int a(x)\, dx + c.$$

ou

$$v = Ce^{\int a(x)dx}, \text{ avec } C = \pm e^{c}.$$

Substituant la valeur trouvée de $v(x)$ dans l'équation (32)*, on obtient*

$$v.\frac{du}{dx} = b(x) \implies \frac{du}{dx} = \frac{b(x)}{v},$$

d'où

$$u = \int \frac{b(x)}{v}dx + c.$$

Substituant dans la formule (30)*, on obtient finalement*

$$y = v(x).\left(\int \frac{b(x)}{v}dx + c\right) = v(x).\int \frac{b(x)}{v}dx + c.v(x).$$

Exemple 5.16 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y^{'}\cos x + y\sin x = x + 1.$$

méthode $y = u.v$

$$y^{'} + y\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x+1}{\cos x} \implies y^{'} + (\tan x).y = \frac{x+1}{\cos x}. \tag{33}$$

On pose $y = u.v \implies y^{'} = u.v^{'} + v.u^{'}$ on remplace dans (33)*.*

$$u.v^{'} + v.u^{'} + (\tan x).u.v = \frac{x+1}{\cos x} = v.u^{'} + u\left(v^{'} + (\tan x)\,v\right) = \frac{x+1}{\cos x}.$$

$$\begin{cases} v^{'} + (\tan x)\,v = 0 \\ u^{'} = \frac{x+1}{v.\cos x} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{dv}{v} = -(\tan x)\,dx \\ u^{'} = \frac{x+1}{v.\cos x} \end{cases} \implies \begin{cases} v = \cos x \\ u^{'} = \frac{x+1}{v.\cos x} \end{cases}$$

On remplace dans la deuxième égalité

$$u^{'} = \frac{x+1}{\cos^2 x} \implies u = \int \frac{x+1}{\cos^2 x}dx.$$

on intègre par partie, on posons

$$\begin{cases} u = x + 1 \\ v^{'} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases} \implies \begin{cases} u^{'} = 1 \\ v = \tan x \end{cases}.$$

$$u = (x+1)\tan x - \int \tan x.dx = (x+1)\tan x + \ln(\cos x) + c.$$

Donc

$$y = u.v = \underbrace{[(x+1)\sin x + \cos x.\ln(\cos x)]}_{y_0} + \underbrace{c\cos x}_{y_h}.$$

5.6.1.4 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 5.4 ***(Théorème de Cauchy-Lipschitz)***

Soit $y^{'} = a(x)\,y + b(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre, où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I.Alors, pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule solution y telle que $y(x_0) = y_0$.

D'après nos calculs précédents cette solution est :

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} b(t)\,e^{-A(t)}\,dt\right) e^{A(x)} + Ce^{A(x)}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

où A est la primitive de a s'annulant en x_0, et cette solution vérifie $y(x_0) = y_0$.

Exemple 5.17 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y^{'} + y = e^x + 1 \text{ avec } y(1) = 2.$$

⋆ *Résolution de l'équation homogène*

$$y^{'} + y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -dx.$$

On intégre

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx \Longrightarrow \ln|y| = -x + c.$$

$$y_h = Ce^{-x} \text{ avec } C = \pm e^c.$$

⋆ *Résolution de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante*

On cherche une solution sous la forme

$$y_0(x) = C(x)\,e^{-x} \Longrightarrow y_0^{'}(x) = C^{'}(x)\,e^{-x} - c(x)\,e^{-x}.$$

En dérivant et en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient

$$C^{'}(x)\,e^{-x} - c(x)\,e^{-x} + C(x)\,e^{-x} = e^x + 1 \Longrightarrow C^{'}(x) = e^{2x} + e^x.$$

Donc

$$C(x) = \int \left(e^{2x} + e^x\right) dx = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x.$$

D'où une solution particulière de l'équation différentielle

$$y_0(x) = \frac{1}{2}e^x + 1.$$

⋆ *les solutions de l'équation différentielle*

$$y = y_0 + y_h = \frac{1}{2}e^x + 1 + Ce^{-x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

⋆ *Nous allons déterminer la constante C afin que la condition initiale $y(1) = 2$ soit vérifiée :*

$$2 = \frac{1}{2}e^1 + 1 + Ce^{-1} \iff 1 - \frac{e}{2} = \frac{C}{e} \iff C = e - \frac{e^2}{2}.$$

Ainsi la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + \left(e - \frac{e^2}{2}\right)e^{-x}.$$

5.6.2 Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{34}$$

où $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et f est une fonction continue sur un intervalle ouvert I. On considère l'équation homogène associée à (34) *définie par :*

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{35}$$

5.6.2.1 Équation différentielle homogène

On cherche une solution de (35) *sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On trouve*

$$ay'' + by' + cy = 0 \iff \left(ar^2 + br + c\right)e^{rx} = 0 \iff ar^2 + br + c = 0.$$

Définition 5.11 *L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée* ***l'équation caractéristique*** *associée à* (35).

Théorème 5.5 *Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à* (35).

• *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de* (35) *sont les*

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

• *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède possède une racine double r_0 et les solutions de* (35) *sont les*

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{r_0 x} \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

• *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de* (35) *sont les*

$$y(x) = e^{\alpha x}\left(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\right) \text{ où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 5.18 .

1) *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation*

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - r - 2 = 0 \implies \Delta = 9 > 0,\ r_1 = \frac{1-3}{2} = -1,\ r_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

d'où

$$y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x} \text{ où } \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

2) *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation*

$$4y'' + 12y' + 9y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$4r^2 + 12r + 9 = 0 \implies \Delta = 144 - 4(4)(-9) = 0,\ r_0 = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2}.$$

d'où

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\, e^{-\frac{3}{2}x} \text{ où } \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

3) *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation*

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \implies \Delta = 4 - 4(1)(5) = -16 < 0.$$

Elle admet deux solutions complexes conjuguées

$$r_1 = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i,\ r_2 = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i.$$

d'où

$$y(x) = e^x\left(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)\right) \text{ où } \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

5.6.2.2 Équation différentielle avec second membre

Nous passons au cas général d'une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, mais avec un second membre f *qui est une fonction continue sur un intervalle ouvert* $I \subset \mathbb{R}$ *:*

$$ay'' + by' + cy = f(x). \tag{36}$$

Pour ce type d'équation, nous admettons le théorème de Cauchy-Lipschitz qui s'énonce comme suit :

Théorème 5.6 ***(Théorème de Cauchy-Lipschitz)***

Pour chaque $x_0 \in I$ *et chaque couple* $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$*, l'équation* (36) *admet une unique solution* y *sur* I *satisfaisant aux conditions initiales :*

$$y(x_0) = y_0 \text{ et } y(x_1) = y_1.$$

Remarque 5.5 .

Dans la pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre (avec ou sans conditions initiales), on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre et on applique le principe de superposition.

Proposition 5.5 .

Les solutions générales de l'équation (36) *s'obtiennent en ajoutant les solutions de l'équation homogène* (35) *à une solution particulière de* (36).

Recherche d'une solution particulière :

• ***Second membre du type*** $e^{\alpha x}P(x)$.

Si $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$, *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $P \in \mathbb{R}[X]$, *alors on cherche une solution particulière sous la forme suivante :*

$$y_0(x) = e^{\alpha x}x^m Q(x),\ \text{où } Q \text{ est un polynôme de même degré que } P.$$

1− $y_0(x) = e^{\alpha x}Q(x)$ $(m = 0)$, *si* α *n'est pas une racine de l'équation caractéristique,*

2− $y_0(x) = xe^{\alpha x}Q(x)$ $(m = 1)$, *si* α *est une racine simple de l'équation caractéristique,*

3− $y_0(x) = x^2e^{\alpha x}Q(x)$ $(m = 2)$, *si* α *est une racine double de l'équation caractéristique.*

• ***Second membre du type*** $e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\right)$.

Si $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\right)$, *avec* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *et* $P_1,P_2 \in \mathbb{R}[X]$, *alors on cherche une solution particulière sous la forme :*

1− $y_0(x) = e^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\right)$, *si* $\alpha + i\beta$ *n'est pas une racine de l'équation caractéristique,*

2 − $y_0(x) = xe^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\right)$, *si* $\alpha + i\beta$ *est une racine de l'équation caractéristique.*

Dans les deux cas, Q_1 *et* Q_2 *sont deux polynômes de degré* $n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$.

Exemple 5.19 1) *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x}. \tag{37}$$

Solution

1) *L'équation caractéristique est*

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \implies \Delta = 25 - 24 = 1 > 0,\ r_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad r_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

d'où

$$y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \text{ où } \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière à (37). *Comme* 2 *est une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme*
$y_0(x) = x(ax+b)e^{2x}$. *Lorsque l'on injecte* y_0 *dans l'équation* (37), *on obtient :*

$$(2a+4ax+2b+4ax+2b+4bx-10ax-5b-10bx+6bx)e^{2x} = 4xe^{2x}.$$

$$(-2ax+2a-b)e^{2x} = 4xe^{2x}.$$

$$-2a = 4 \text{ et } 2a-b = 0.$$

$$a = -2 \text{ et } b = -4.$$

On obtient

$$y_0(x) = x(-2x-4)e^{2x}.$$

5.7 Équation différentielle de Bernoulli et Riccati

5.7.1 Équation différentielle de Bernoulli

L'équation de ***Bernoulli*** *s'écrit de la forme suivante :*

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \;\; n \neq 0, n \neq 1.$$

Pour résoudre ce type d'équation on considère le changement de variable suivant :

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}.$$

Cette équation différentielle de Bernoulli se ramène à une équation différentielle linéaire.

Exemple 5.20 *On considère l'équation différentielle de Bernoulli suivante :*

$$y - xy' = 2xy^2. \tag{38}$$

On pose $z = \frac{1}{y^{2-1}} = \frac{1}{y}$ *et l'équation* (38) *devient :*

$$z^{-1} + xz'z^{-2} = 2xz^{-2} \Longrightarrow z + xz' = 2x. \tag{39}$$

On remarque bien que l'équation (39) *est une équation différentielle linéaire*
• *On résout l'équation homogène*

$$z + xz' = 0 \Longrightarrow \int \frac{dz}{z} = \int -\frac{1}{x}dx \Longrightarrow \ln|z| = -\ln|x| + c \Longrightarrow z = \frac{C}{x} \text{ avec } C = \pm e^c. \tag{40}$$

• *Pour résoudre l'équation avec second membre on utilise la méthode de la variation de la constante, ce qui nous donne :*

$$z_0(x) = \frac{C(x)}{x} \Longrightarrow z_0^{'}(x) = \frac{C^{'}(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}.$$

On remplace dans (39)*, cela donne :*

$$C^{'}(x) = 2x \Longrightarrow C(x) = x^2 \Longrightarrow z_0(x) = x.$$

La solution générale de (39) *est donnée par :*

$$z = x + \frac{C}{x} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \Longrightarrow y = z^{-1} = \frac{x}{x^2 + C} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

5.7.2 Équation différentielle de Riccati

*L'équation de **Riccati** s'écrit de la forme suivante : :*

$$y^{'} + a(x)\,y + b(x)\,y^2 = c(x).$$

Pour pouvoir résoudre ce type d'équation, on doit connaître une solution particulière y_0*, et si c'est le cas on considère le changement de variable suivant :*

$$u = y - y_0.$$

*ce qui nous ramène à la résolution d'une équation différentielle de **Bernoulli** avec* $n = 2$.

Exemple 5.21 *On considère l'équation différentielle de **Ricatti** suivante :*

$$x^2 y^{'} + x^2 y^2 = xy - 1 \text{ avec } y_0 = \frac{1}{x}. \tag{41}$$

Posons

$$u = y - \frac{1}{x} \Longrightarrow y = u + \frac{1}{x}.$$

L'équation (41) *devient :*

$$x^2\left(u^{'} - \frac{1}{x^2}\right) + x^2\left(u^2 + 2\frac{u}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = xu.$$

qui se simplifie en

$$x^2\left(u^{'} + u^2 + 2\frac{u}{x}\right) = xu.$$

ce qui correspond à l'équation de Bernoulli :

$$u^{'} + \frac{u}{x} + u^2 = 0 \tag{42}$$

L'équation (42) *devient :*

$$\frac{u^{'}}{u^2}+\frac{1}{xu}+1=0. \tag{43}$$

On pose $z=\frac{1}{u} \implies z^{'}=-\frac{u^{'}}{u^2}$.

$$-z^{'}+\frac{z}{x}+1=0.$$

Ses solutions sont les

$$z=Cx+x\ln|x|\,,\ \ C\in\mathbb{R}.$$

Ainsi

$$u(x)=\frac{1}{Cx+x\ln|x|}\ \textit{et aussi la solution}\ u(x)=0.$$

Comme $y=u+\frac{1}{x}$, *on obtient alors des solutions de l'équation* (41)

$$y=\frac{1}{x}\quad ou \quad y=\frac{1}{x}+\frac{1}{Cx+x\ln|x|}.$$

Bibliographie

[1] *Alibert D., Exercices corrigées d'analyse avec rappels de cours, université de Grenoble,* (1992).

[2] *Benzine R., Cours d'analyse première année, EPST,* (2015).

[3] *Chabloz P., Cours d?Analyse I et II, École Polytechnique Fédérale de Lausanne,* (2013).

[4] *Giroux A., Analyse 2 note de cours, université de Montréal ,* (2004).

[5] *Esserhane W., Cours d'analyse mathématique, ENSSEA,* (2018).

[6] *Mehbali M., Fonctions de plusieurs variables réelles Mathématique 2,* (2015).

[7] *Mehbali M., Fonction d'une variable réelle Mathématiques première année,* (2008).

[8] *Veuillez P., Cours fonctions de deux variables,* (2012).

[9] *Wieslawa J. Kaczor et Maria T. Nowak, Problèmes d'analyse I,* (2008).

[10] *Wieslawa J. Kaczor et Maria T. Nowak, Problèmes d'analyse II,* (2008).

[11] *Wieslawa J. Kaczor et Maria T. Nowak, Problèmes d'analyse III,* (2008).