الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا لعلوم التسيير-عنابة-

Ministry of Higher Education and Scientific Research

Higher School of Management Sciences – ANNABA-

مطبوعة بيداغوجية بعنوان:

محاضرات في مقياس رياضيـــــــات المؤسسة

موجهة لطلبة الطور الثاني، السنة الأولى ماستر جدع مشترك

من إعداد الدكتور: نشمة ياسين

الرتبة: أستاذ محاضر قسم -أ-

السنة الجامعية: 2024/2023

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا لعلوم التسيير-عنابة-

Ministry of Higher Education and Scientific Research

Higher School of Management Sciences – ANNABA-

مطبوعة بيداغوجية بعنوان:

محاضرات في مقياس رياضيـــــــات المؤسسة

موجهة لطلبة الطور الثاني، السنة الأولى ماستر جدع مشترك

من إعداد الدكتور: نشمة ياسين

الرتبة: أستاذ محاضر قسم -أ-

السنة الجامعية: 2024/2023

تعهد

أنا الموقع أدناه السيد: نشمة ياسين، أستاذ محاضر -أ- بالمدرسة العليا لعلوم التسيير، أشهد بشرفي بأن العمل المنجز تحت عنوان: " محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة" الموجه لطلاب الطور الثاني، السنة الأولى ماستر جدع مشترك، شعبة علوم التسيير، هو نتيجة بحثي وجهودي الشخصية، وتستشهد كمرجع بجميع المصادر المستخدمة.

تمهيد

رياضيات المؤسسة هي فرع من فروع الرياضيات التطبيقية، وجزءا أساسيا من الرياضيات وهي النواة التي تستند إليها معظم التخصصات الرياضية والعلمية الأخرى، فهي تستخدم منهجية بحوث العمليات وأساليبها في حل المشكلات واتخاذ القرارات الإدارية.

نشأت رياضيات المؤسسة كتطبيق علمي للأساليب الرياضية والإحصائية في حل التحديات الإدارية والاقتصادية المتنوعة التي تواجه اتخاذ القرارات في مجال أداء المهام.

تتسم رياضيات المؤسسة بتعدد وتنوع أساليبها، إلا أن لكل أسلوب مجال معين للاستخدام، ومن الأساليب الشائعة الاستخدام وأهميتها في مجال الاقتصاد والتسيير: البرمجة الخطية، نموذج النقل، نموذج التعيين، نماذج شبكات الأعمال، تحليل سلاسل ماركوف، نظرية المباريات، البرمجة الديناميكية، نماذج المحاكاة.

من خلال هذه السلسلة من المحاضرات، نهدف إلى تقديم أهم مكونات رياضيات المؤسسة، بداية بالتعرف على مفهوم البرمجة الخطية وخوارزمياتها، أهم شروط استخدامها، ثم التعرف على كيفية صياغة نموذج رياضي وطرق الحل لإيجاد الحل الأمثل، كيفية صياغة النموذج الثنائي وكيفية استنتاج الحل الأمثل بالإضافة إلى تحليل الحساسية، وصولا إلى مسائل النقل وأخيرا مدخل إلى البرمجة غير الخطية.

خصصت عند نهاية كل محور تمارين مقترحة لخصت خلالها وبشكل مركز ودقيق ما يجب على الطالب اكتسابه من هذه العناصر، بالإضافة لأمثلة محلولة مستمدة من مشاكل واقعية بغرض ربط الطالب بالواقع العملي لما تم تناوله في الجزء النظري.

الغرض من المطبوعة:

تهدف هذه المطبوعة:"محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة" الموجهة لطلبة السنة أولى ماستر جدع مشترك، شعبة علوم التسيير، إلى تقريب هذه الطرق والأدوات الرياضية للطالب وكيفية تطبيقها ميدانيا، حيث يرتبط استعمال هذه التقنيات الرياضية بإمكانيات المؤسسة ومواردها وأهدافها، وبقدرات متخذي القرارات فيها.

ومن بين أبرز أهداف محتوى البرنامج الخاص بهاته المطبوعة الذي يتجه بشكل عام نحو تعزيز وتطوير مجموعة متنوعة من المهارات والقدرات لدى الطلاب على النحو التالي:

- تعريف الطالب باستخدامات رياضيات المؤسسة خاصة في المجال الاقتصادي؛
- تمكين الطالب من فهم البرمجة الخطية؛

- تمكين الطالب من صياغة النموذج الرياضي لأي برنامج خطي انطلاقا من المشاكل السياقية؛
- تمكين الطالب من إيجاد حلول لمشاكل البرمجة الخطية والحل الأمثل بيانيا وبطريقة سمبلكس؛
- كتابة مسألة النقل بالشكل الرياضي، وحل المسألة بالطرق الثلاث للتوزيع واختبار الطريقة الأمثل؛
- وأخيرا تمكين الطالب من فهم البرمجة غير الخطية من خلال المحور المخصص لمدخل إلى البرمجة غير الخطية.

التعرف على المادة التعليمية:

- **العنوان:** رياضيات المؤسسة
- **وحدة التعليم:** منهجية
- **عدد الأرصدة:** 04
- **المعامل:** 02
- **الحجم الساعي:** 45 ساعة
- **المحاضرة (عدد الساعات في الأسبوع):** 01 سا 30د
- **أعمال توجيهية (عدد الساعات في الأسبوع):** 01 سا 30د
- **طريقة التقييم:** امتحان: **60**%، **مستمر:** 40 %

محتوى المادة:

يحتوي البرنامج على المحاور التالية:

- **المحور الأول:** مقدمة حول البرمجة الخطية وصياغة مشكلاتها
- **المحور الثاني:** طرق حل نماذج البرمجة الخطية
- **المحور الثالث:** الثنائية وتحليل الحساسية
- **المحور الرابع:** مسائل النقل
- **المحور الخامس:** مدخل إلى البرمجة غير الخطية بقيود أو بدون قيود

محتوى البرنامج

	الصفحة
تعهد	أ
الغرض من المطبوعة	ب
التعرف على المادة التعليمية	ت
محتوى المادة	ت
المحور الأول: البرمجة الخطية (Linear programming)	
البرمجة الخطية: مفاهيم ومصطلحات أساسية	1
تعريف البرمجة الخطية	2
نشأة البرمجة الخطية	3
مجالات استخدام البرمجة الخطية	3
افتراضات أساسية في البرمجة الخطية	4
شروط استخدام البرمجة الخطية	4
عناصر البرمجة الخطية	5
مشاكل الأمثلية	5
مشاكل البرمجة	5
مشاكل البرمجة الخطية	6
الشكل العام للبرنامج الخطي	6
مراحل صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية	9

تمارين مقترحة	17
المحور الثاني: طرق حل نماذج البرمجة الخطي	
تمهيد	20
حل البرنامج الخطي –الطريقة البيانية– The Graphical Method	20
خطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية –حالة التعظيم–	20
حالة التدنئة	25
حالات خاصة في الحل البياني	27
حل البرنامج الخطي– طريقة السمبلكس أو طريقة الجداول–	34
خطوات الحل بطريقة السمبلكس	34
إيجاد الحل في حالة التعظيم	36
إيجاد الحل في حالة التخفيض (التدنئة)	45
البرمجة الخطية – طريقة السمبليكس أو طريقة الجداول– حالات خاصة	50
تمارين مقترحة	52
المحور الثالث: الثنائية وتحليل الحساسية	55
تمهيد	56
خطوات تشكيل النموذج الثنائي	56
كيفية تحويل النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل (ثنائي):	57
كيفية استنتاج الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من خلال الحل الأمثل للبرنامج الأصلي	62
طرق حل المسألة الثنوية	65

التحليل الحسي	74
تمهيد	74
تحليل الحساسية	74
حالة تغير معاملات متغيرات دالة الهدف– الحدود الدنيا والقصوى لدالة الهدف	75
حالة تغير الطرف الأيمن للقيود الوظيفية (المتاح) b_j	78
تمارين مقترحة	83
المحور الرابع: مسائل النقل (transportation problèms)	
تمهيد	87
شروط استخدام طريقة النقل	87
صياغة مشكلة النقل	87
حل لمسائل النقل	89
– المرحلة الأولى: تحديد الحل الإبتدائي وطرق الحل	89
– المرحلة الثانية: تحسين الحل الابتدائي (مرحلة اختبار الحل وسيرورة تحسينه)	101
حل مسائلة النقل بطريقة الشبكة (شبكة النقل)	115
حالات خاصة لنماذج النقل	123
تمارين مقترحة	128
المحور الخامس: مدخل للبرمجة غير الخطية بقيود أو بدون قيود (*Introduction to nonlinear programming with constraints or without constraints*)	
مدخل إلى البرمجة غير الخطية بقيود وبدون قيود	130
تمهيد	130

الفرق بين البرمجة الخطية وغير الخطية	131
مفهوم البرنامج غير الخطي	131
النهايات العظمى والدنيا المحلية والكلية	132
طرق حل البرنامج غير الخطية	134
– حل البرامج غير الخطية بدون قيود	134
– حل البرامج غير الخطية المقيدة	141
تمارين مقترحة	148
قائمة المراجع	149

المحور الأول: البرمجة الخطية

تمهيد

البرمجة الخطية: مفاهيم ومصطلحات أساسية

- **تعريف البرمجة الخطية**
- **نشأة البرمجة الخطية**
- **مجالات استخدام البرمجة الخطية**
- **افتراضات أساسية في البرمجة الخطية**
- **شروط استخدام البرمجة الخطية**
- **عناصر البرمجة الخطية**
- **مشاكل الأمثلية**
- **مشاكل البرمجة**
- **مشاكل البرمجة الخطية**
- **الشكل العام للبرنامج الخطي**
- **مراحل صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية**
- **أمثلة تطبيقية**

المحور الأول: البرمجة الخطية

Linear Programming

تمهيد:

البرمجة الخطية تعتبر أداة قيمة للتخطيط واتخاذ القرار في العديد من المجالات مثل إدارة الإنتاج، التخطيط اللوجستي، تخصيص الموارد، والاقتصاد.

تلعب البرمجة الخطية دورًا مهمًا في مساعدة المؤسسات والشركات في اتخاذ قرارات مبنية على أدلة رياضية وعلمية، وبالتالي تسهم في تحقيق التوازن بين الاحتياجات والموارد وهي تساعد في تحسين الكفاءة وتقليل التكاليف وزيادة الربحية.

البرمجة الخطية: مفاهيم ومصطلحات أساسية

1- تعريف البرمجة الخطية:

البرمجة الخطية: "هي عبارة عن أسلوب رياضي يستخدم لمساعدة المدراء في التخطيط واتخاذ القرارات الإيجابية بصدد توزيع الموارد البشرية والمادية المحدودة بين أفضل الاستخدامات المتاحة، بهدف تحقيق أكبر عائد مادي ممكن أو تحقيق أقل تكلفة ممكنة ضمن مجموعة من القيود (المعيقات) والعوامل الثابتة، بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة".[1]

كما تعرف البرمجة الخطية على أنها: " تقنية رياضية تبحث عن حلول لمشكلة اقتصادية -إنتاجية، مالية، نقل، تحليل المشاريع، مباريات أو خدمات- واختيار الحل الأمثل، هذه التقنية الرياضية تستعمل من طرف الموظفين، الإحصائيين والمسيرين لإيجاد الطريقة المثلى لتخصيص موارد المؤسسة المحدودة المستعملة لاستخدامات مختلفة من أجل تحقيق هدف معين".[2]

وعليه البرمجة الخطية كإحدى طرق رياضيات المؤسسة، فإنها أداة أو أسلوب رياضي تكون فيه العلاقات خطية، وهو يبحث عن هدف معين (تعظيم أو تخفيض) لإيجاد الحل الأمثل، وذلك وفق خطوات محددة ومنه جاء مصطلح برمجة، أما مصطلح خطية نتج من كون القيود هي عبارة عن متباينات خطية، والمقصود منها: "في ظل ظروف وشروط وقيود معينة".

وبما أن المؤسسة الاقتصادية تستعمل الموارد النادرة وفق مختلف الاستخدامات وذلك بهدف تحقيق أقصى ربح وهذا حسب المعادلة التالية:

الربح = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

كما تجدر الإشارة إلى بعض المفاهيم المستعملة:

---

1 أحمد محمد الهزاع الصمادي، أساسيات بحوث العمليات، دار قنديل للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، الأردن، 2008، ص 17.

2 بوقرة رابح، بحوث العمليات، مؤسسة شباب الجامعة، مصر، 2009، ص ص 21-22.

- **البرمجة** ***(programming)***: تعني البحث عن البرنامج الذي يحقق الهدف المطلوب أي التقنية الرياضية المستخدمة لإيجاد الحل الأمثل. ونعني بها التخطيط لتحقيق هدف معين، يتمثل في **الحل الأمثل**.
- **الخطية** ***(linear)***: تعني أن جميع العلاقات بين متغيرات النموذج الرياضي خطية (خط مستقيم) متغيرات النموذج من الدرجة الأولى، أي تغير قيمة المخرجات تبعا لتغير قيمة المدخلات بنفس النسبة.
- **النموذج ((model)**: يعرف النموذج على أنه الطبيعة الرياضية لمشكل ما.
- **النمدجة (modelization)**: ويقصد بعملية النمدجة صياغة وكتابة مشكل ما في شكل رياضي.

2- نشأة البرمجة الخطية

ظهر أسلوب البرمجة الخطية بشكله الحديث على يد George Dantzig في الولايات المتحدة الأمريكية سنة 1947 حيث تمكن من حل بعض المشاكل التي يعاني منها سلاح الطيران الأمريكي في مجالات التخطيط وتحديد برامج الصيانة والتدريب وذلك بالاعتماد على ما يسمى بطريقة السمبلكس " Simplex Method ". ونظرا للتبسيط الذي جاءت به هذه الطريقة بالإضافة إلى انتشار تكنولوجيا المعلوماتية بشكل واسع، بدأ استعمال هذا الأسلوب في الأغراض الصناعية والاقتصادية والإدارية بشكل مثير للاهتمام في مختلف المؤسسات مما سمح بحل المشاكل المعقدة والتي يمكن حلها يدويا أو التي تحتاج إلى وقت وجهد طويلين.

3- مجالات استخدام البرمجة الخطية

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الاقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الاقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا.

ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية في مجالات العلوم الاقتصادية، المالية، التجارية، وعلوم التسيير عامة ما يلي:

- مسائل الإنتاج: تحديد برنامج إنتاج بما يضمن تقليل التكاليف/ تعظيم الأرباح مع الأخذ في الاعتبار الطلب المتوقع؛
- مسائل المزيج الإنتاجي: المساعدة على تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل؛
- مسائل توزيع الطاقة الإنتاجية المتاحة (قوى عاملة، مواد أولية، آلات، مستلزمات الإنتاج المختلفة...) على العمليات الصناعية بما يحقق الاستخدام الأمثل لهذه الموارد (من خلال تحديد التوليفة المثلى للمنتجات).[1]
- مسائل الدعاية والاشهار؛

[1] إلياس سالم، محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة محمد بوضياف، المسيلة، 2016-2017، ص 1.

- مسائل النقل؛
- مسائل التخصيص؛
- مسائل تخطيط الاستثمار...إلخ.

ففي **حالة التعظيم**: تعظيم الأرباح، تعظيم الإنتاج، تعظيم طاقات التخزين، تعظيم استخدام اليد العاملة، تعظيم استخدام رؤوس الأموال وغير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم.

أما في **حالة التدنئة**: تدنئة التكاليف، تدنئة الخسائر، تدنئة عدد الموظفين، تدنئة الأجور الإجمالية، وغير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التدنئة.

4- افتراضات أساسية في البرمجة الخطية:[1]

تبني البرمجة على جملة من الافتراضات لعل أهمها:

- **التناسبية**: سواء كان ذلك لدالة الهدف أو القيود، ونقصد بالتناسبية أنه مثلا إذا كان إنتاج الوحدة الواحدة يتطلب 2 ساعة عمل فإن إنتاج 10 وحدات يتطلب 20 ساعة عمل.
- الإضافية: معنى ذلك إذا كان الربح المحقق من المنتج الأول يساوي 10 دينار والربح المحقق من المنتج الثاني يساوي 15 دينار، وتم إنتاج وحدة واحدة من المنتج الأول ووحدة واحدة من المنتج الثاني، فإن مجموع الأرباح سيكون 10+15=25 دينار.
- **قابلية القسمة**: معنى ذلك أن الحل ليس بالضرورة أن يكون أعداد طبيعية بل يمكن أن يكون عدد كسري.
- **الخطية**: حيث يشترط أن تكون دالة الهدف والقيود عبارة عن معادلات أو مترجحات تحتوي على متغيرات من الدرجة الأولى.
- **عدم السلبية**: أي أن قيم جميع المتغيرات موجبة أو معدومة.
- **التأكد التام**: يجب أن تكون جميع المعلومات التي تعتمد عليها البرمجة الخطية مؤكدة ولا تتغير خلال فترة الدراسة، سواء تعلق الأمر بدالة الهدف أو القيود.

5- شروط استخدام البرمجة الخطية

يعتمد أسلوب البرمجة الخطية على مجموعة من الشروط أو الفرضيات الواجب توفرها من أجل التعبير عن المشكلة المواجهة رياضيا وأهمها:

- ✓ العلاقة الخطية **linearity**: أي وجود علاقة خطية بين المتغيرات في كل من دالة الهدف وكذلك القيود؛
- ✓ يجب أن يكون من الممكن التعبير عن مختلف العوامل في المسألة في شكل كمي؛
- ✓ يجب أن يتوفر عنصر التأكد من مختلف المعطيات التي تشكل المسألة؛ القيم العددية الموجودة في دالة الهدف والقيود معروفة ولا تتغير في فترة الدراسة؛

---

[1] فاتح لقومي، رياضيات المؤسسة، محاضرات مدعمة بأمثلة محلولة باستخدام برنامج QM، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة العربي بن مهيدي، أم البواقي، بدون سنة، ص7.

- ✓ علاقة تأثير بين المجاهيل؛
- ✓ توفر البدائل؛
- ✓ القابلية للضرب والقسمة: أي هناك إمكانية الحساب من خلال الطريقة الثلاثية لكميات الإنتاج أو المواد الأولية اللتان تجمعها علاقة طردية، وأنه توجد علاقة طردية بين المدخلات والمخرجات في دالة الهدف؛
- ✓ الإضافية: أي عدم وجود تداخل في إنتاج سلعتين على نفس الآلة، بل الوقت الإجمالي للنشاط هو الوقت الخاص بإنتاج السلعة الأولى زائد الوقت الخاص بإنتاج السلعة الثانية وهكذا؛
- ✓ عدم السالبية: وذلك فيما يخص قيم المتغيرات لكي يكون هناك انسجام مع أن الكميات لا تكون سالبة.

6- عناصر البرمجة الخطية

يتكون نموذج البرمجة الخطية من ثلاثة عناصر هي:

أ- **دالة الهدف objective function**: يجب العمل دوما على تحديد الهدف المنشود من وراء حل المشكلة، هذا الهدف قد يكون تعظيم (أرباح، فوائد، إنتاجية) أو تخفيض (تكاليف، مسافة، تعويضات)، وتكون مؤلفة من متغيرات من الدرجة الأولى تدعى بـ:" **متغيرات القرار**".

ب- **القيود contraints**: هي مجموعة المحددات التي لا يستطيع متخذ القرار التحكم فيها ولكنه يحاول الوصول إلى أفضل قرار في ظلها. حيث يتم تجسيدها في شكل متباينات ومعادلات رياضية.

ت- **شرط عدم السلبية**: يشترط البرنامج الخطي أن تكون المتغيرات غير سالبة، لكونها ترتبط بكميات مادية، وهذه الأخيرة لا يمكن أن تساوي قيم سالبة. إلا أن هناك حالات خاصة تكون فيها المتغيرات سالبة وتتطلب حلولا خاصة.

7- مشاكل الأمثلية optimization problems

مشاكل الأمثلية هي تلك المشاكل التي نبحث فيها عن أكبر أو أصغر قيمة لدالة تعتمد على متغير أو متغيرات وتسمى هذه الدالة بدالة الهدف **Objective function** وتخضع هذه الدالة إلى قيود متمثلة في معادلات أو متباينات تربط وتحكم المتغيرات بعضها بالبعض، ونطلق على المتغيرات $x_1, x_2, \ldots x_n$ بمتغيرات القرار **Decision Variables**، وهي التي نبحث عن قيمها لتعظيم أو تدنئة دالة الهدف.

8- مشاكل البرمجة Programming Problems

مشاكل البرمجة هي المشاكل التي تتطلب إيجاد التوزيع الأمثل **Optimal Allocation** للموارد المحدودة (عمالة، مواد، آلات، أموال، الخ) لتحقيق أهداف معينة.

9- مشاكل البرمجة الخطية Linear Programming Problems

وهي المشـاكل التي تتطلب إيجاد أكبر أو أصـغر قيمة لدالة هدف خطية طبقـا لقيود خطية. بمعنى أن العلاقة التي تربط بين المتغيرات بعضها بالبعض هي علاقة خطية (متباينات أو معادلات من الدرجة الأولى، الأس =1).

10- الشكل العام للبرنامج الخطي

إن جميع المواقف الاقتصادية والإدارية التي تقود نماذج رياضية خطية تتصف بالصفات التالية:[1]

أ- **وجود عدد من المتغيرات**: تدعى متغيرات القرار التي يجب تحديد قيمتها للوصول إلى الهدف المنشود (أكبر ربح، أقل تكلفة)، نرمز لهذه المتغيرات بـ:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_n$$

ب- **وجود هدف يراد الوصول إليه**: يعبر عنه رياضيا بدالة خطية تدعى دالة الهدف، وتأخذ الشكل العام التالي:

$$\mathbf{Z} = \sum_{j=1}^{n} C_j\, x_j$$

وتصنف الأهداف التي تعالجها البرمجة الخطية إلى مجموعتين:

✓ تعظيم دالة الهدف Maximisation

كأن نسـعى إلى تعظيم الربح أو الإنتاج، أو تعظيم اسـتخدام الموارد المتاحة ورؤوس الأموال واليد العاملة، تعظيم طاقات التخزين، ويرمز لدالة الهدف في هذه الحالة كما يلي:

$$\mathrm{Max}(Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j\, x_j$$

✓ تدنئة دالة الهدف Minimisation

كأن نسـعى إلى تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن، أو تقليل الخسـائر، تخفيض الوقت الضـائع وزمن غياب العاملين، تقليل زمن تعطل الآلات، تقليل المخاطرة في الشغل، ويرمز لدالة الهدف في هذه الحالة كما يلي:

$$\mathrm{Min}(Z) = \sum_{j=1}^{n} C_j\, x_j$$

ت- **وجود علاقة تأثير بين المتغيرات**: يعبر عنها رياضـيا بمتراجحات تدعى الشـروط الخطية أو قيود المسـألة، وهي مجموعة من المحددات التي تحد من درجة تحقيق الأهداف، فعملية تحقيق الهدف تشترط الاستجابة لهذه المتطلبات بشكل جماعي، وتأخذ أحد الشكلين التاليين:

---

[1] حمادي خديجة، محاضرات وتمارين في مقياس رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة أكلي محند أولحاج، البويرة، 2020-2021، ص ص 4-5.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i \;\leq\; b_i \qquad\qquad ; i = 1, 2, \dots\dots\dots, m$$

إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم أي Max

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i \;\geq\; b_i \qquad\qquad ; i = 1, 2, \dots\dots\dots, m$$

إذا كانت دالة الهدف من نوع تصغير أي Min

حيث أنه في كلا الشكلين:

n: تعبر عن عدد المتغيرات في النموذج الخطي.

m: عدد قيود المسألة(عدد الشروط الخطية).

$\mathbf{a_{ij}}$: أعداد حقيقية تدعى معاملات المتغيرات في قيود المسألة.

$\mathbf{b_{ij}}$: أعداد حقيقية تعبر عن الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لكل قيد من قيود المسألة.

ث– توفر مجموعة من الشروط: يجب أن تحقق المتغيرات شروط معينة بغض النظر عن مردودها من حيث الهدف الذي يجب تحققه.

بناءا على ما سبق فإن البرنامج الخطي في حالة التعظيم يأخذ الشكل النظامي التالي:[1]

$$\mathbf{Max(Z)} = \sum_{j=1}^{n} C_j\, x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i \;\leq\; b_i \qquad\qquad ; i = 1, 2, \dots\dots\dots, m$$

$$x_i \geq 0$$

أو بالشكل المفصل:

$$\mathbf{Max(Z)} = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

$$\mathbf{s/c} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \;\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \;\leq b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \;\leq b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \dots, x_n \geq 0$$

[1] Salim Haddadi, programmation linéaire une approche mathématique et algorithmique, ellipses édition, 2021, p13.

وبصيغة المصفوفات يأخذ الشكل التالي:

$$\mathrm{Max(Z)} = \boldsymbol{C^{/}X}$$

$$\text{s/c} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

حيث:

$$\mathrm{Max(Z)} = \boldsymbol{C^{/}X}$$

$$\textbf{s/c} \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$A_{m*n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{14} & a_{15} & a_{16} \ldots \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{24} & a_{25} & a_{26} \ldots \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots . & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots & & & .a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$C = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . c_n]$$

أما البرنامج الخطي في حالة تصغير فيأخذ الشكل النظامي التالي:

$$\mathrm{Min(Z)} = \sum_{j=1}^{n} C_j \, x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_i \geq b_i \qquad ; i = 1, 2, \ldots \ldots \ldots, m$$

$$x_i \geq 0$$

أو بالشكل المفصل:

$$\text{Min}(Z) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s/c}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \ldots, x_n \geq 0$$

أما بصيغة المصفوفات فيأخذ الشكل التالي:

$$\text{Min}(Z) = C^{/}X$$

$$\text{s/c}\begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

- وللإشارة فإن مسائل البرمجة الخطية يمكن تمثيلها وفق ثلاث صيغ هي:

أ- **الصيغة العامة(المختلطة)** (**mixed form**) : عادة ما تكتب البرامج الخطية في بداية وضعها على شكل صيغة عامة تحتوي على كل الإشارات ($\leq$ ، = ، $\geq$).

ب- **الصيغة القانونية** (**canonical form**): هي الصيغة التي تحتوي على إشارتي $\leq$ أو $\geq$ فقط.

-فإذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أقل أو تساوي فإننا نبحث عن التعظيم (Max) ؛

-أما إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أكبر أو تساوي، فإننا نبحث عن التخفيض (Min) ؛

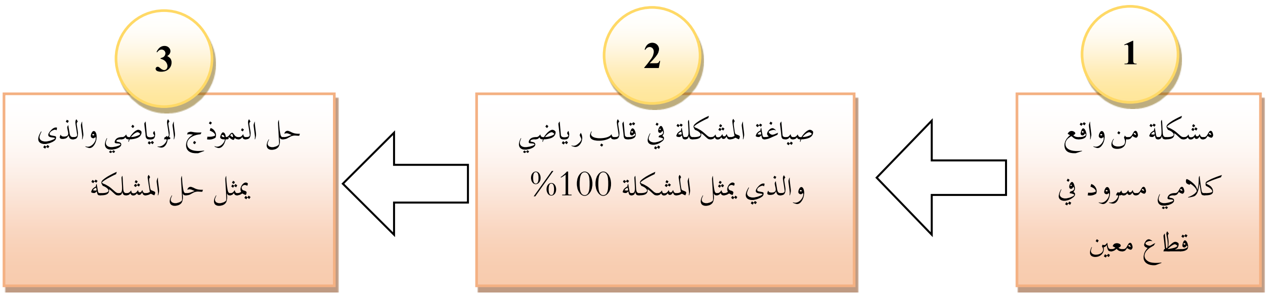
ت- **الصيغة المعيارية أو النموذجية** (**standard form**): هي الصيغة التي تحتوي على إشارة يساوي (=) فقط.

11- مراحل صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

تشكيل أو بناء البرنامج الخطي هو أهم خطوة في البحث عن الأمثلية، ويقصد به تحويل المسألة من واقع كلامي مسرود في تعابير أدبية إلى شكل مسألة مصاغة في قالب رياضي واضح، متكون من عدد من المتغيرات، به دالة هدف تكون إما في حالة تعظيم أو تدنئة، وعدد من القيود تكون إما في شكل معادلات أو متراجحات أو هما معا.

الشكل المبسط التالي يوضح خطوات البحث عن الأمثل.

شكل يوضح خطوات البحث عن الأمثلية



المصدر: من إعداد الباحث

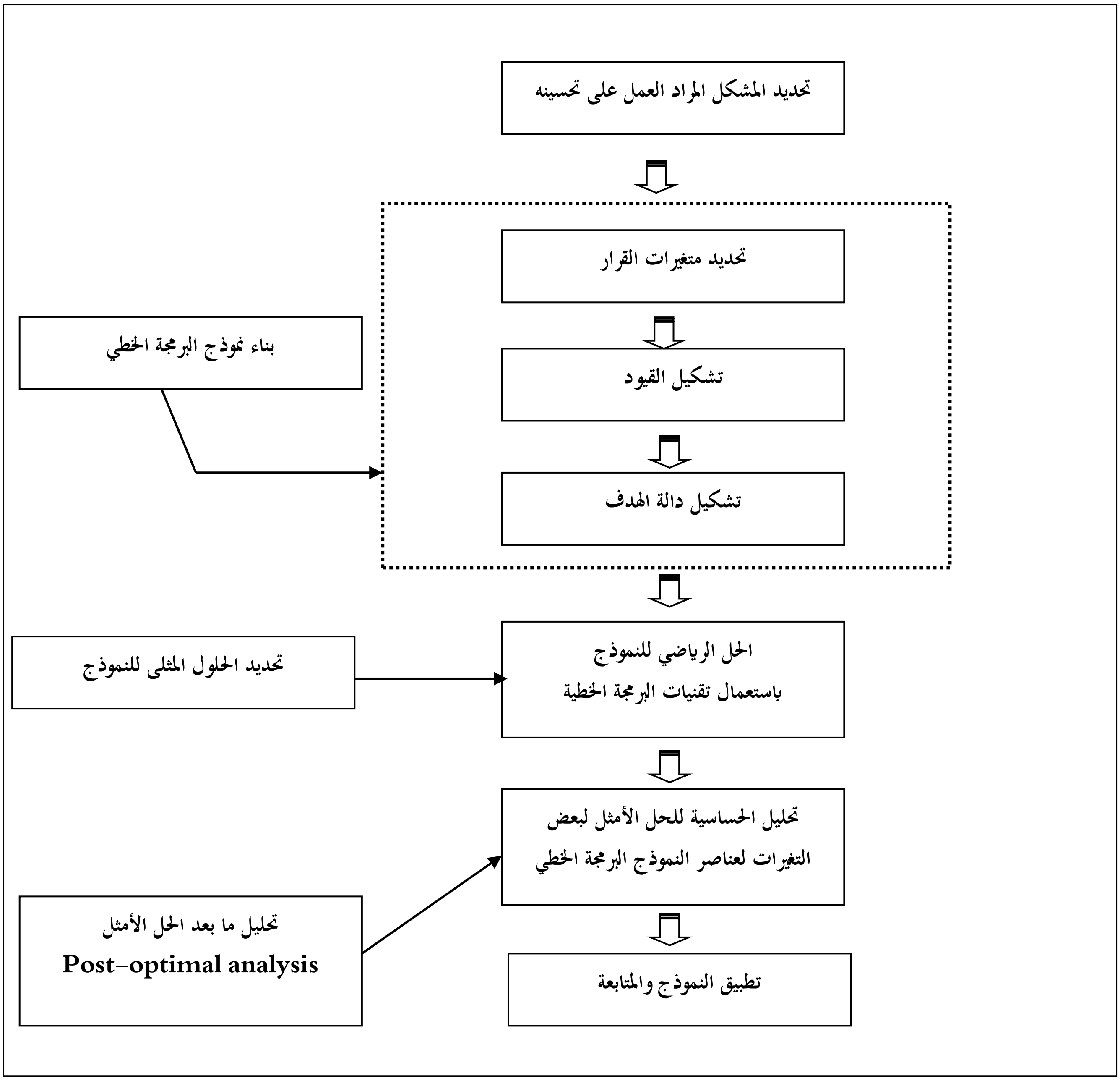
تعد عملية صياغة النموذج الرياضي من الخطوات المهمة في بحوث العمليات، ففي هذه المرحلة تحول القضية المدروسة من شكلها الطبيعي، إلى مسألة رياضية، وهذا ينطوي على تبسيط المشكلة وبيان أثر البيئة المحيطة بها وهنا تتجلى مهارة واضعي النموذج لأن

البيئة المحيطة تحتوي العديد من العوامل المؤثرة وإدخالها في النموذج يجعل المسألة معقدة ويجعل عمليات البحث عن الحل طويلة وغالبا غير عملية يتوجب تبسيط النموذج الرياضي قدر المستطاع، أي عدم إدخال المؤثرات الضعيفة في النموذج دون أن يطال المؤشرات المهمة (الفعالة)، لأن هذا قد يضلل الباحث، ويقود إلى نتائج خاطئة.

يختلف عن النظام الأصلي حيث يحتوي فقط العوامل الأساسية (متغيرات، قيودا، مقاييس) التي تحدد الاتجاه (الخط) الأساسي للنظام الحقيقي.

وبشكل مفصل يمكن توضيح طريقة النمذجة والتحليل في البرمجة الخطية على النحو التالي:

شكل يوضح طريقة النمذجة والتحليل في البرمجة الخطية



Source : Gérald Baillargeon, programmation linéaire appliquée, outils d'optimisation et d'aide à la décision, les éditions SMG, Québec,1996, p06.

كخلاصة لما سبق ذكره:

لتشكيل البرنامج الخطي ينبغي:

- تحديد طبيعة المشكلة(الهدف): تحديد نوعها إما التعظيم (Max) أو التدنئة (Min)،
- تحديد المتغيرات التي تمثل المجاهيل للمشكل المدروس،
- ثم تشكيل جدول المسألة بعد ذلك، بحيث يحتوي هذا الجدول على جميع عناصر المسألة من متغيرات وقيود وكذا الكميات المحددة لدالة الهدف،
- وقبل ذلك ينبغي التأكد من تجانس المعطيات، إذ ينبغي أن تكون وحدات قياس العناصر المتشابهة متجانسة، كما ينبغي أن تكون وحدات قياس العناصر المكونة لدالة الهدف أيضا متجانسة،
- تحديد القيود والحدود أي شروط وظروف المؤسسة في شكل متراجحات ومعادلات،
- التكوين النهائي للمشكلة أي تلخيصها في شكل نموذج رياضي يشمل دالة الهدف والقيود،
- شرط عدم السلبية.

ويمكن للأمثلة التالية أن يعطي نظرة واضحة حول كيفية تشكيل البرنامج الخطي لمسألة ما.

أمثلة تطبيقية:

مثال1:

تقوم مؤسسة (x) بإنتاج نوعين من التجهيزات B,A وذلك باستخدام نوعين من المادة الأولية وذلك حسب الاحتياجات التالية:

A : 4 وحدات من م1 ، و2 وحدات من م2.

B: 5 وحدات من م1 و 4 وحدات من م2.

المطلوب:

تحديد النموذج الرياضي لهذه المسألة إذا علمت أن ربح الوحدة الواحدة من A هو 9دج ومن Bهو 12 دج في حين أن الكمية المتاحة من المادة الأولى م1 هي 200 وحدة ومن المادة الثانية م2 هي 120 وحدة.

الحل:

تحديد النموذج الرياضي:

-الخطوة1: تحديد طبيعة المشكلة (الهدف)

يتضح من المسألة أن المؤسسة تسعى إلى تحديد الكميات التي تنتجها من كل نوع والتي تحقق لها أكبر ربح ممكن، وعليه المؤسسة تهدف إلى تعظيم أكبر ربح ممكن، إذن دالة الهدف من النوع Max (Maximisation).

-الخطوة2: تحديد نوع المتغيرات

تسعى المؤسسة إلى تحديد الكميات الواجب إنتاجها من كلا النوعين من التجهيزات هناك مجهولين:

x_1: عدد الوحدات المنتجة من A .

x_2: عدد الوحدات المنتجة من B .

-**الخطوة3: تمثيل معطيات المثال في جدول**

جدول المسألة

	A	**B**	**القيود**
م1	4	5	200
م2	2	4	120
ربح	9	12	

-**الخطوة4: صياغة دالة الهدف:**

$$\boldsymbol{Max(Z) = A_{\text{ربح}} + B_{\text{ربح}} \quad \rightarrow Max(Z) = 9x_1 + 12x_2}$$

القيود:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 120 \end{cases}$$

شرط عدم السلبية:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ومنه النموذج:

$$Max(Z) = 9x_1 + 12x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 120 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال2:

تقوم مؤسسة ما بإنتاج الكراسي والطاولات وبيعها للمدارس، حيث أن إنتاج كرسي واحد يتطلب 3 صفائح خشبية و4 قطع من الحديد، وبعد بيعه يحقق ربحا قدره 250 دج، أما إنتاج الطاولة الواحدة فيتطلب 6 صفائح خشبية و7قطع من الحديد، وبعد بيعها تحقق ربحا قدره 430 دج، حيث أن المؤسسة لا تتوفر إلا على 180 قطعة خشبية و320 قطعة من الحديد.

فما هي الكميات المثلى الواجب إنتاجها من كلا المنتجين، والتي تحقق لمؤسسة أكبر ربح ممكن؟

الحل:

-**الخطوة1: تحديد طبيعة المشكلة (الهدف)**

يتضح من المسألة أن المؤسسة تسعى إلى تحديد الكميات التي تنتجها من كل نوع والتي تحقق لها أكبر ربح ممكن، وعليه المؤسسة تهدف إلى تعظيم أكبر ربح ممكن، إذن دالة الهدف من النوع Max (Maximisation).

-**الخطوة2: تحديد متغيرات القرار**

x_1: تمثل كمية الكراسي التي سوف تنتجها المؤسسة وتحقق لها أكبر ربح؛

x_2: تمثل كمية الطاولات التي سوف تنتجها المؤسسة وتحقق لها أعظم ربح؛

-الخطوة3: تمثيل معطيات المثال في جدول

جدول المسألة

	الخشب	الحديد	الربح
الكراسي	3	4	250
الطاولات	6	7	430
الكمية المتاحة	180	320	

-الخطوة4:

- صياغة دالة الهدف

إن ربح المؤسسة ناتج عن إنتاج وبيع كل من الكراسي والطاولات وعليه:

إنتاج الكراسي:

إنتاج كرسي واحد يحقق ربحا قدره (1* 250)

إنتاج 2 من الكراسي يحقق ربحا قدره (2 * 250)

إنتاج x_1 كرسي يحقق ربحا قدره (x_1 * 250)

إنتاج الطاولات

إنتاج طاولة واحدة يحقق ربحا قدره (1* 430)

إنتاج (2) طاولتان يحقق ربحا قدره (2* 430)

إنتاج x_2 طاولة يحقق ربحا قدره (x_2 * 430)

وعليه بما أن هذه المؤسسة تسعى إلى تعظيم أرباحها فإنه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$\mathbf{Max\ (Z) = 250\ x_1 + 430\ x_2}$$

- صياغة القيود الوظيفية:

فعلى المؤسسة أن تحترم ما تتوفر عليه من مواد أولية عند تعظيمها لأرباحها.

المادة الأولية الأولى(الخشب):

تمثل كمية الخشب الكلية مجموع الخشب المستخدم في إنتاج الكراسي (x_1 x 3) والخشب المستخدم لإنتاج الطاولات (x_2 x 6) والذي يجب ألا يتجاوز الكمية المتاحة والمقدرة بـ 180 قطعة. وهذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$\mathbf{3\ x_1 + 6\ x_2 \leq 180}$$

المادة الأولية الثانية(الحديد):

تمثل كمية الحديد الكلية مجموع الحديد المستخدم المستخدم في إنتاج الكراسي (x_1 * 4) والحديد المستخدم لإنتاج الطاولات (x_2 * 7) والذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة والمقدرة بـ 320 قطعة. وهذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$4\ x_1 + 7\ x_2 \leq 320$$

- **قيود عدم سلبية المتغيرات:**

حيث أن إنتاج كل من الكراسي والطاولات لا يمكن أن يكون بكميات سالبة.

فإما يكون موجبا أو معدوما، وهو ما يعبر عنه بالصياغة التالية:

$$x_1 \geq 0 \qquad\qquad x_2 \geq 0$$

وعليه بتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

$$\text{Max } Z = 250\ x_1 + 430\ x_2 \qquad \text{دالة الهدف}$$

Soumise aux contraintes تحت القيود

$$\begin{cases} 3\ x_1 + 6\ x_2 \leq 180 & \text{قيد الخشب} \\ 4\ x_1 + 7\ x_2 \leq 320 & \text{قيد الحديد} \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$ قيد عدم سلبية المتغيرة الأولى

$x_2 \geq 0$ قيد عدم سلبية المتغيرة الثانية

مثال3:

مؤسسة اقتصادية بها ثلاث ورشات لإنتاج ثلاثة أنواع من المنتوجات هي:

- خزائن حديدية؛
- مكاتب إدارية؛
- كراسي.

بحيث أن كل منتوج يمر عبر الثلاث ورشات على النحو التالي:

- الورشة الأولى: تجري بها عملية صناعة الهياكل، طاقة العمل القصوى بها هي: 32 ساعة عمل يوميا (أي 4عمال وكل عامل يشتغل 8 ساعات يوميا)؛
- الورشة الثانية: تجرى بها عملية تركيب الملحقات، طاقة العمل القصوى بها هي: 24 ساعة عمل يوميا؛
- الورشة الثالثة: تجرى بها عملية الإنهاء (طلاء، تزيين، تغليف) طاقة العمل القصوى بها هي: 16 ساعة عمل يوميا.

هذه المؤسسة تسعى لتحقيق أكبر ربح ممكن، ولأجل ذلك بينت لها الدراسة التقنية التي قامت بها أن الوحدة الواحدة من المنتوج الأول تتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى، و2 ساعة عمل في الورشة الثانية، وساعة عمل في الورشة الثالثة، بينما الوحدة الواحدة من المنتوج 2 تتطلب 4 ساعات عمل في الورشة الأولى، 4 ساعات عمل في الورشة الثانية، 2 ساعة عمل في الورشة

الثالثة، وأخيرا الوحدة الواحدة من المنتوج 3 تتطلب خمس ساعات عمل في الورشة الأولى، و3 ساعات عمل في الورشة الثانية، و1 ساعة عمل في الورشة الثالثة.

كما أن الربح الصافي للوحدة الواحدة من كل منتوج هو:

- المنتوج الأول: 200دج؛
- المنتوج الثاني: 150 دج؛
- المنتوج الثالث: 120 دج.

المطلوب: أوجد الصيغة الرياضية لهذه المسألة والتي من شأنها إيجاد الكميات الواجب إنتاجها من كل منتوج لأجل تعظيم ربح هذه المؤسسة؟

الحل:

- **أول خطوة** في إيجاد الصيغة الرياضية هي تحديد المتغيرات: بما أن المؤسسة تبحث عن الكميات الواجب إنتاجها من كل منتوج لتعظيم أرباحها لذلك فإن المجاهيل هي عدد الخزائن وعدد المكاتب وعدد الكراسي، وهي بالتالي متغيرات المسألة، لذلك نضع:

  - عدد الخزائن: X_1؛
  - عدد المكاتب: X_2؛
  - عدد الكراسي: X_3.

- ثاني خطوة هي تحديد جدول المسألة: وهو جدول مساعد يحتوي على كل عناصر القيود وعناصر دالة الهدف، بحيث توضع المتغيرات بشكل عمودي ومعطيات القيود ودالة الهدف بشكل أفقي وذلك كما يظهر في الجدول التالي:

جدول المسألة

منتوجات / ورشات	الوقت المستغرق في كل ورشة بالساعات			الطاقة القصوى للورشات ساعة عمل
	المنتوج1: X_1	المنتوج2: X_2	المنتوج 3: X_3	
الورشة الأولى	4	4	5	32
الورشة الثانية	2	4	3	24
الورشة الثالثة	1	2	1	16
ربح الوحدة الواحدة (دج)	**200**	**150**	**120**	

يلخص الجدول السابق معطيات المسألة:

- من أجل إنتاج وحدة واحدة من المنتوج الأول يتطلب 4 ساعات عمل في الورشة 1 وإنتاج وحدتين يتطلب 2*4 ساعات عمل، وإذا ما تم إنتاج وحدة واحدة من كل منتوج بالنسبة للورشة الأولى، فإن ذلك يتطلب 1*4+1*4+1*5 = 13 ساعة عمل، بينما الطاقة القصوى للورشة الأولى هي 32 ساعة عمل وإذا ما أريد إنتاج الكميات x_1،x_2،x_3 من كل منتوج، فإن وقت العمل المستغرق في الورشة الأولى هو: 4*1+4*2+5*3.

ويجب ألا يتجاوز 32 ساعة عمل، وهي الطاقة القصوى لهذه الورشة، وبالمثل بالنسبة لبقية المنتوجات، وعليه نستنتج منظومة القيود التالية:

- قيد الورشة الأولى: $4x_1+4x_2+5x_3 \leq 32$
- قيد الورشة الثانية: $2x_1+4x_2+3x_3 \leq 24$
- قيد الورشة الثالثة: $2x_1+2x_2+1x_3 \leq 16$

وبما أن الكميات يستحيل أن تكون سالبة، لذلك فإن القيد الأخير يكتب كما يلي:

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0 \ , \ X_3 \geq 0$$

كما يظهر من خلال الجدول أيضا أن الوحدة الواحدة من المنتوج 1 تجلب ربحا مقداره 200دج، وعند إنتاج وحدتين فإن الربح المحصل عليه من المنتوج الأول هو 400 دج، وبالتالي إنتاج الكمية X_1 يجلب للمؤسسة $200*X_1$ وبالمثل بالنسبة للمنتوجين الثاني والثالث، وعليه تصمم دالة الهدف على النحو التالي:

$$\text{Max } (Z)=200X_1+150X_2+120X_3$$

أي أن الهدف هو إيجاد قيم x_i التي تجعل من Z في أعظم قيمة لها دون تجاوز قدرات الورشات، وعليه يكون البرنامج الخطي للمسألة على الشكل التالي:

$$\text{Max } Z=200X_1+150X_2+120X_3$$

$$\textbf{s/c} \quad \begin{cases} 4x_1+4x_2+5x_3 \leq 32 \\ 2x_1+4x_2+3x_3 \leq 24 \\ 2x_1+2x_2+1x_3 \leq 16 \end{cases}$$

$$\mathbf{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0}$$

ونكون بذلك قد انتقلنا من الشكل الوصفي للمسألة إلى شكلها الرياضي وهو ما يصطلح عليه بتشكيل البرنامج الخطي أو بناء النموذج الخطي، وهو مؤلف من مجمعين أساسيين: الأول هو دالة الهدف المراد تعظيمها، والثاني هو مجموعة القيود التي يجب احترامها.

تمارين مقترحة:

تمرين 1:

مؤسسة لصنع الأثاث المنزلي تنتج نوعين من الأسرة غير أن طاقة تموينها بمادة الخشب محدودة إذ لا تتاح لها أسبوعيا سوى 12 صفيحة خشبية، كما أن ورشة العمل لا يمكنها أن تتسع لأكثر من 72 ساعة عمل خلال نفس الفترة.

إذا علمت أن:

السرير الواحد من النوع الأول يتطلب صفيحتين (02) من الخشب و (10) ساعات عمل؛

السرير الواحد من النوع الثاني يتطلب صفيحة واحدة (01) من الخشب و (08) ساعات عمل؛

ثمن السرير الواحد من النوع الأول هو 1300دج و800دج للنوع الثاني؛

تكلفة السرير الواحد من النوع الأول هو 300دج و200دج للنوع الثاني.

المطلوب:

أوجد البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم إيراد المؤسسة؟

أوجد البرنامج الخطي الذي من شأنه تعظيم ربح المؤسسة؟

أكتب البرنامج الخطي على الشكل المصفوفي؟

تمرين 2:

ينتج أحد المصانع نوعين من الإنتاج من سلعة واحدة النوع العادي والممتاز، ويستخدم آلتان في الإنتاج، ولإنتاج وحدة واحدة من النوع العادي يجب تشغيل الآلة الأولى لمدة ساعتين والثانية لمدة ساعة واحدة، ولإنتاج وحدة واحدة من النوع الممتاز يجب تشغيل الآلة الأولى لمدة ساعة واحدة والثانية لمدة ساعتين، فإذا علمت أن:

- ربح الوحدة الواحدة من النوع العادي هو 2 دينار بينما ربح الوحدة الواحدة من النوع الممتاز هو 1.5 دينار.
- الطاقة الإنتاجية لكل آلة لا تتجاوز 8 ساعات.

المطلوب:

- إيجاد النموذج الرياضي (الخطة الإنتاجية) التي تحقق أكبر عائد ممكن للمصنع.

تمرين 3:

تنتج شركة يابانية ثلاثة أنواع من أجهزة التلفاز وحسب الدراسات التي توصلت إليها يجب أن تنتج كحد أدنى من الأنواع الثلاثة الكميات التالية:

- 200 جهاز من النوع الأول.
- 250 جهاز من النوع الثاني.
- 100 جهاز من النوع الثالث.

ويتوفر للشركة 2000 وحدة من الوحدات القابلة للتصنيع للأنواع الثلاثة وكذلك يتوفر لديها 1000 ساعة عمل، الجدول التالي يبين متطلبات ووقت الإنتاج وعدد الوحدات القابلة للتصنيع والربح لكل جهاز:

النوع	**عدد الوحدات القابلة لتصنيع جهاز واحد**	**وقت الإنتاج بالساعات**	**ربح/ جهاز**
1	1,0	2,0	10
2	1,5	1,2	14
3	4,0	1,0	12

المطلوب:

- بناء النموذج الرياضي لزيادة أرباح الشركة إلى الحد الأقصى.

المحور الثاني: طرق حل نماذج البرمجة الخطية

تمهيد

حل البرنامج الخطي –الطريقة البيانية–

خطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية:

- **في حالة التعظيم (Max)**
- **في حالة التدنئة (Min)**
- **حالات خاصة في الحل البياني**

البرمجة الخطية طريقة السمبليكس أو طريقة الجداول

- **إيجاد الحل في حالة التعظيم**
- **إيجاد الحل في حالة التدنئة (التخفيض)**

تمهيد

نعني بحل البرنامج الخطي إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل من دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود، سواء كانت دالة الهدف في حالة تعظيم أو في حالة تدنئة، ويمكن إيجاد حل للبرنامج الخطي بإحدى الطريقتين:

- الطريقة البيانية: وهي شائعة الاستخدام فقط في البرامج التي تحتوي على متغيرين على الأكثر.
- طريقة السمبليكس أو طريقة الجداول: وهي طريقة عامة تستخدم مهما كان عدد متغيرات البرنامج.

حل البرنامج الخطي– الطريقــة البيانيــة– The Graphical Method

تعتبر الطريقة البيانية من أبسط الطرق المتبعة في معالجة مسائل البرمجة الخطية وخاصة المسائل التي يكون فيها عدد المتغيرات قليل (تستخدم فقط عندما يحتوي البرنامج على متغيرين على الأكثر)، وذلك لصعوبة تصور المسألة على معلم يحتوي على أكثر من بعدين، ويمكن استعمال الطريقة البيانية سواء في حالة التعظيم أو في حالة التدنئة. وتعتمد على الرسم البياني بالدرجة الأولى والتي تتم في إطار الإحداثيات الأفقية والعمودية.

1– خطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية:

☞ 1.1 حالة التعظيم:

لحل برنامج التعظيم بهذه الطريقة يتم اتباع الخطوات التالية:[1]

أ– الإستعانة برسم بياني ذو محورين (محور للمتغير X_1 ومحور للمتغير X_2) (معلم متعامد ومتجانس)

ب– تحول كل متراجحات القيود إلى معادلات؛

ت– نرسم الخطوط المستقيمة لمعادلات الخطوة –ب– على معلم متعامد، تسمى المستقيمات المحصل عليها **بالمستقيمات المولدة**، وهي قد تشكل لنا على المعلم مضلع متعدد الرؤوس؛

ث– نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهي توجد إلى يمين المستقيم في حالة كون القيد **أقل من** وإلى يساره في حالة القيد **أكبر من**.

[1] حمودي حاج صحراوي، رياضيات المؤسسة، كمدخل إلى التقنيات الكمية، دار النشر جيطلي، برج بوعريريج، الجزائر، الطبعة الأولى، 2014، ص20.

ج- نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود وهي في الغالب تشكل مضلع متعدد الرؤوس، يطلق عليها منطقة الحلول الممكنة (Basic feasible region)؛

ح- نجعل دالة الهدف معدومة، أي نساويها إلى الصفر، ونرسم مستقيمها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ، نسمي هذا المستقيم المستقيم Δ؛

خ- نحرك المستقيم Δ بصفة متوازية اتجاه رؤوس المضلع المحصل عليه من المستقيمات المولدة بموجب الخطوة –ث-، وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة الاقتصادية (دالة الهدف) هي أخر نقطة يصل إليها المستقيم Δ عند سحبه إلى الأعلى بشكل مواز لأصله، وهي نقطة حاصلة من تقاطع عدة مستقيمات مولدة؛

د- نجد قيم الأزواج المرتبة لهذه النقطة وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنحصل على قيمة المتغيرة الأولى، ونمد من هذه النقطة أيضا مستقيما موازيا للمحور الأفقي فيتقاطع مع المحور العمودي عند نقطة هي قيمة المتغيرة الثانية، أو جبريا بإيجاد الحل المشترك لمعادلات المستقيمات المتقاطعة فنصحل على قيمة المتغيرين؛

ذ- في حالة ما إذا لم نتمكن من تعيين هذه النقطة بدقة لوجود عدد من النقاط المتجاورة أو المتوازية التي يقترب منها المستقيم Δ، فإننا نجد الأزواج المرتبة لكل تلك النقاط ونعوضها في دالة الهدف، ونأخذ النقطة التي تعطي أكبر قيمة لها؛

ر- نعوض قيمتي المتغيرين المحصل عليهما في دالة الهدف فنحصل على القيمة العظمى لهذه الدالة.

ملاحظة: في حالة عدم التمكن من تحديد أخر نقطة يصل إليها المستقيم، بسبب عدم التمكن من تميزها، نجد قيم المتغيرات عند النقاط المشتبه فيها ثم نعوضها في دالة الهدف، ونأخذ النقطة التي تعطي أعظم قيمة للدالة الاقتصادية.

أمثلة تطبيقية:

مثـال1:

أوجد حل للبرنامج التالي باستخدام الطريقة البيانية

$$\textbf{Max} : Z=100X_1+60X_2$$

$$\textbf{s/c} \begin{cases} 8X_1+2X_2 \leq 40 \\ 6X_1+9X_2 \leq 108 \\ 8X_1+6X_2 \leq 96 \end{cases}$$

$$X_1 \geq 0,\ X2 \geq 0$$

الحل:

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

أ- نستخرج المستقيمات المولدة وذلك بتحويل المتراجحات إلى معادلات كما يلي:

$8X_1+6X_2= 96$	$6X_1+9X_2= 108$	$8X_1+2X_2= 40$

ب- على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نصل بينهما كما هو موضح في الشكل التالي:

المستقيم 3

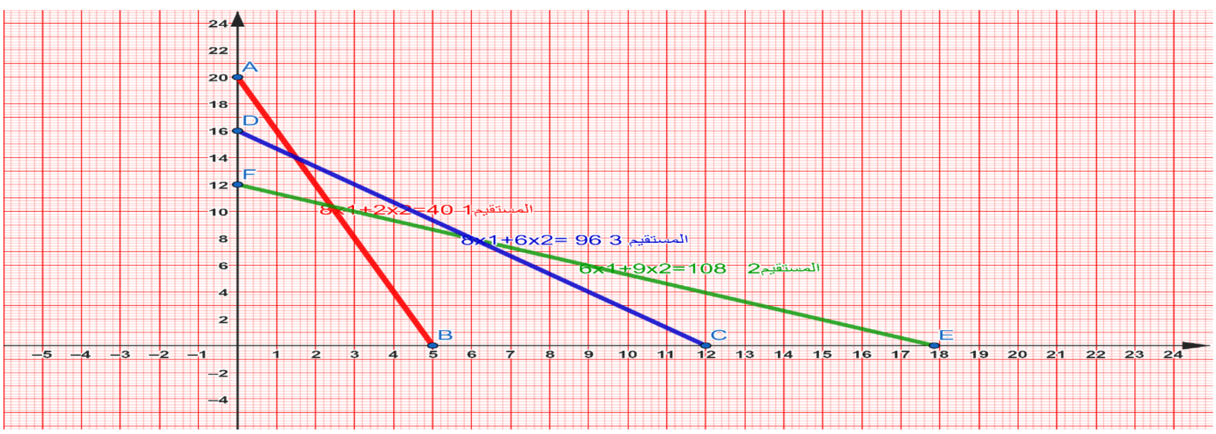
$8X_1+6X_2= 96$	
X_1	X_2
0	16
12	0

المستقيم2

$6X_1+9X_2= 108$	
X_1	X_2
0	12
18	0

المستقيم1

$8X_1+2X_2= 40$	
X_1	X_2
0	20
5	0



على نفس المعلم نرسم المستقيم، وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الاقتصادية في أدنى قيمة لها وهي Z=0 أي:

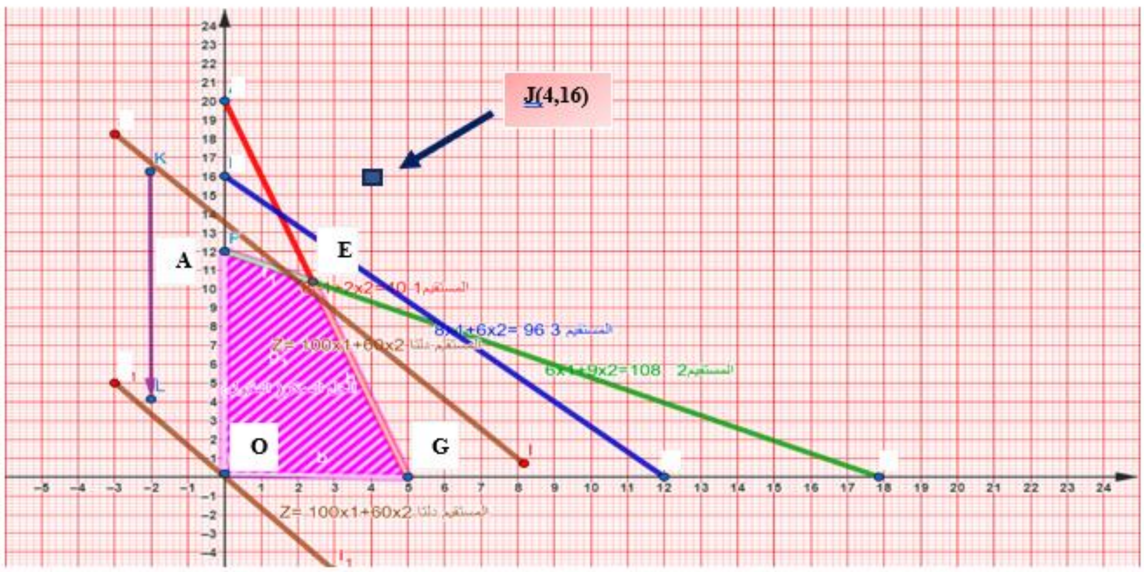
$$Z=100X_1+60X_2= 0$$

المستقيم Δ يمر من النقطتين:

100X1+60X2= 0	
X_1	X_2
3	5-
3-	5

ويكفي تحديد نقطة واحدة فقط لكونه يمر إلزاما بنقطة المبدأ.

بعد رسم المستقيمات المولدة نشطب المناطق التي لا تحقق جميع القيود كما يظهر في الشكل التالي:



من خلال الشكل نلاحظ أن أية نقطة توجد إلى يمين المستقيم (1) لا تحقق القيد، فلو أخذنا النقطة **J** على سبيل المثال حيث:

$X_1=4$ و $x_2=16$ لوجدنا أن:

$.8X_1+2X_2 = 8*4+2*16 = 64 >40$

فالقيد إذا غير محقق على اليمين، لكن أية نقطة على يسار المستقيم (1) فهي تحقق القيد، فلو أخذنا النقطة **M** على سبيل المثال حيث: $X_1=2$ و $x_2=8$ لوجدنا أن:

$.8X_1+2X_2= 8*2+2*8 = 32 <40$

فالقيد إذا محقق، وظهر هناك فرق في الطاقة بقيمة 8 وحدات، ومن جهة أخرى فإن أي نقطة على طول المستقيم (1) تحقق القيد بالتمام أي تحقق المساواة، وهي بذلك تستنفذ كل الطاقات المتاحة.

وبتطبيق نفس المبدأ نجد أن كل المناطق الموجودة على يمين المستقيمات (1)(2)(3) لا تحقق القيود، بينما كل المناطق التي هي على يسار كل مستقيم فهي تحقق القيد، وبمعنى أخر فإن أية نقطة على المستقيم (1) أو على يساره تحقق متراجحة القيد، وأي نقطة على يمينه لا تحقق تلك المتراجحة، وأية نقطة على المستقيم (2) أو على يساره تحقق متراجحة القيد، وأية نقطة على يمينه لا تحقق تلك المتراجحة، وبالمثل فإن أية نقطة على المستقيم (3) أو على يساره تحقق متراجحة القيد أية نقطة على يمينه لا تحقق تلك المتراجحة.

كما أن قيد عدم السالبية يجعل كل المناطق التي هي أدنى من المحور الأفقي وكل المناطق التي هي إلى يسار المحور العمودي مرفوضة، وبالتالي فإنه لا توجد سوى منطقة واحدة هي التي تحقق جميع القيود أنيا، وتشمل جميع النقاط الموجودة داخل المنطقة (**OAEG**) أي المنطقة غير المشطبة وتسمى هذه المنطقة بمنطقة الحلول الممكنة أو منطقة الحلول المقبولة.

عند تحريك المستقيم Δ إلى الأعلى نجد أن أخر نقطة يصلها إلى منطقة الحلول المقبولة أي هي النقطة **E** وبالتالي تشكل لنا هاته النقطة الحل الأمثل للمسألة، وهي نقطة تقاطع المستقيمين (1)و(2) إذ نجد قيمة المتغيرين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة X_1 وإمداد خط موازي للمحور الأفقي انطلاقا من النقطة **E** فنجد قيمة المتغير X_2 عند نقطة تقاطعه مع المحور العمودي، وإما أن نجد قيمة المتغيرين بحل معادلتي المستقيمين حلا مشتركا كما يلي:

مستقيم(1): $8X_1+2X_2= 40$

مستقيم(2): $6X_1+9X_2= 108$

بضرب معادلة المستقيم (1) في 3 ومعادلة المستقيم (2) في -4 نجد:

بجمع المعادلتين نجد:

$$\begin{array}{ll} 24X_1+6X_2 & = 120 \\ -24X_1-36X_2 & = -432 \\ \hline \mathbf{-30X_2} & \mathbf{=-312} \end{array}$$

$$X_2=-312/-30 = \mathbf{10.4}$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد $\mathbf{X_1=2.4}$

وبالتالي فإن قيمة التغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الاقتصادية هما: $X_1=2.4$ و $X_2=10.4$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: $8*2.4+2*10.4=40$ قيد محقق

القيد الثاني: $6*2.4+9*10.4=108$ قيد محقق

القيد الثالث: $8*2.4+6*10.4=81.6<96$ قيد محقق وتبقى طاقة غير مستعملة قيمتها 14.4 ساعة عمل

ولمعرفة القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على ما يلي:

$$Z=100X_1+60X_2 = 100*2.4+60*10.4=864$$

وهي أعلى قيمة للدالة الاقتصادية، ولا يمكن أن توجد أية قيم أخرى للمتغيرين تعطيان أعلى من هذه القيمة للدالة الاقتصادية وتحقق في نفس الوقت جميع القيود.

☞ 2.1 حالة التدنئة:

لإيجاد الحل الأمثل بالطريقة البيانية في حالة التدنئة، نتبع الخطوات التالية:

أ- نحول كل متراجحات القيود إلى معادلات؛

ب- نرسم الخطوط المستقيمة لمعادلات الخطوة -أ- على معلم متعامد، تسمى المستقيمات المحصل عليها **بالمستقيمات المولدة**؛

ت- نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهي توجد إلى يسار المستقيمات في حالة كون القيد **أكبر من** إلى يمينه في حالة القيد **أقل من**؛

ث- نحدد المنطقة التي تحقق جميع القيود وهي في الغالب توجد إلى يمين المستقيمات المولدة، وتسمى بمنطقة **الحلول الممكنة** أو **حيز الإمكان**؛

ج- نجعل دالة الهدف معدومة، أي نساويها للصفر، ونرسم مستقيمها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ نسميه المستقيم Δ؛

ح- نحرك المستقيم Δ بصفة متوازية اتجاه رؤوس المنطقة التي تحقق القيود المحصل عليها من المستقيمات المولدة في الخطوة -ث- ، وتكون النقطة التي تحقق أقل قيمة للدالة الاقتصادية -دالة الهدف- هي أول نقطة يصل إليها المستقيم Δ عند تحريكه إلى الأعلى بصفة متوازية لأصله، وهي نقطة حاصلة من تقاطع عدة مستقيمات؛

خ- نجد احداثيات هذه النقطة إما بالحل المشترك أو بالإسقاط الهندسي، فنحصل بذلك على قيمة المتغيرين اللتين تدنيان الدالة الاقتصادية؛

د- نعوض قيم المتغيرات المحصل عليها في دالة الهدف فنحصل على القيمة الدنيا لها.

ملاحظة: في حالة عدم التمكن من تحديد أول نقطة يصل إليها المستقيم، بسبب عدم التمكن من تمييزها، نجد قيم المتغيرات عند النقاط المشتبه فيها ثم نعوضها في دالة الهدف، ونأخذ النقطة التي تعطي أقل قيمة للدالة الاقتصادية.

مثـال:

أوجد حل أمثل للبرنامج التالي باستعمال الطريقة البيانية:

$$\textbf{Min } Z=10X_1+30X_2$$

$$\textbf{s/c}\quad \begin{cases} 3X1+2X2\geq 6 \\ 6X1+X2\geq 6 \\ X2\geq 2 \\ X1\geq 0,\ X2\geq 0 \end{cases}$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

أ- المستقيمات المولدة المحصل عليها هي:

ب- نستخرج المستقيمات المولدة وذلك بتحويل المتراجحات إلى معادلات كما يلي:

$3X_1+2X_2= 6$	$6X_1+X_2= 6$	$X_2= 2$

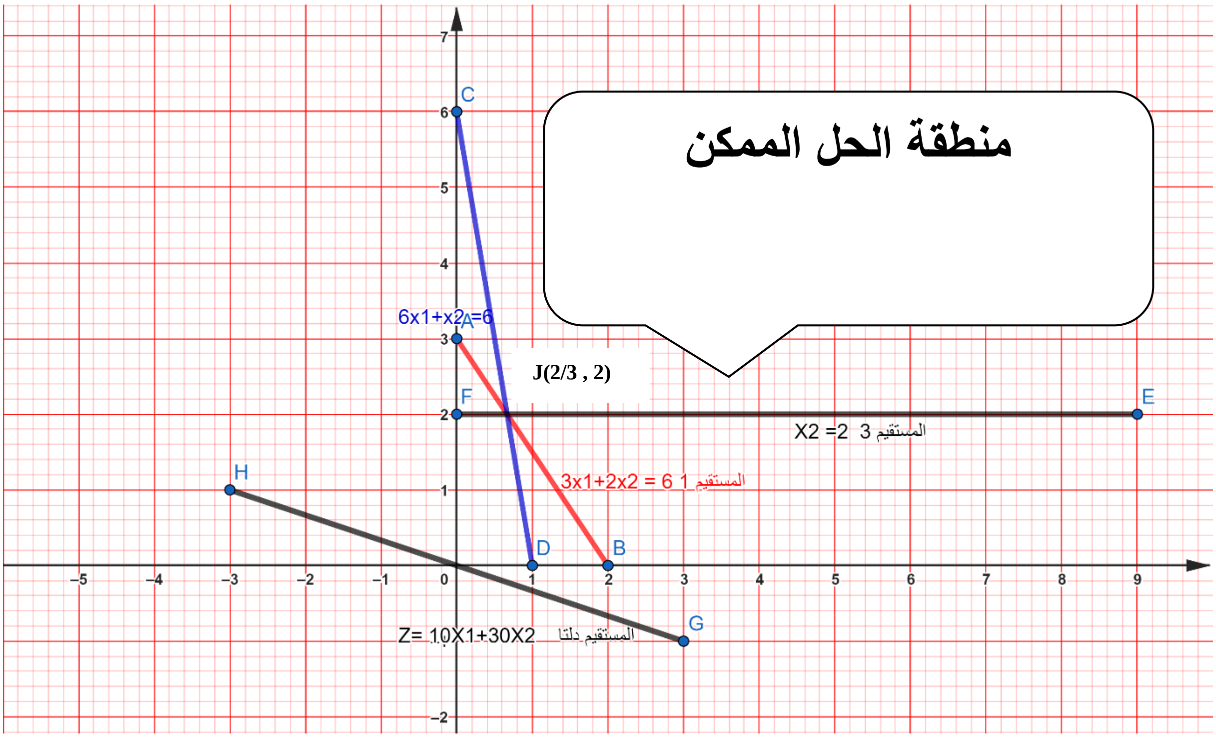
ت- على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بهما كل مستقيم ثم نصل بينهما كما هو موضح في الشكل التالي:

المستقيم (1)	
$3X_1+2X_2= 6$	
X_2	X_1
3	0
0	2

المستقيم (2)	
$6X_1+X_2= 6$	
X_2	X_1
6	0
0	1

المستقيم Δ	
$Z=10X_1+30X_2=0$	
X_2	X_1
-1	3
1	-3

نقوم برسم هذه المستقيمات على معلم متعامد ونحدد منطقة الحل المقبول، وهي المنطقة غير المشطبة، نلاحظ الشكل التالي:



فنلاحظ أن أية نقطة على الخط (2) أو إلى يمينه غير المشطب تحقق جميع القيود، وأية نقطة على الخط (3) أو إلى أعلاه غير المشطب تحقق جميع القيود، غير أنه بالنسبة للخط (1) فإنه لا توجد سوى نقطة واحدة فقط هي التي تحقق جميع القيود، وعليه يكون الحل في أحد الرأسين إما **J** أو **C**، غير أنه عند تحريك المستقيم Δ إلى أعلى نجد أن أول رأس يصل إليه في منطقة الحل المقبول هو **J**، وبالتالي فإن قيم المتغيرتين اللتين تحققين أدنى قيمة للدالة الاقتصادية هي نقطة التقاطع بين المستقيمات الثلاثة،

ولإيجادها يكفي أن ننزل من هذه النقطة شاقولا على المحور الأفقي فنجد قيمة X_1 المقابلة، ونمد خط موازي للمحور X_1 فيتقاطع مع المحور العمودي عند نقطة تحدد قيمة X_2 ،أو أن نحل معادلات هذه المستقيمات حلا مشتركا، وعليه نجد القيمتين التاليتين:

$$X_2 = 2 \qquad X_1 = 2/3 = 0.66$$

وهما قيمتان تجعلان الدالة الاقتصادية في أدنى قيمة لها، وفي نفس الوقت تجعلان كل القيود محققة، حيث نجد القيمة العظمى للدالة الاقتصادية وهي:

$$\mathbf{Z}=10X_1+30X_2=10*0.66+30*2=\mathbf{66.66}$$

☞ 1-3حالات خاصة في الحل البياني:

يمكن أن نصادف عدة حالات خاصة أثناء إيجاد الحل بالطريقة البيانية منها ما يلي: [1]

- **تعدد الحلول:**

يمكن أحيانا أن نصادف أكثر من حل واحد، وهي الحالة المسماة بتعدد الحلول، وفيها نجد على الأقل أن رأسين من رؤوس مضلع حيز الإمكان يتماسان في أن واحد مع المستقيم Δ بحيث يكونا أخر رأسين يصلهما في حالة التعظيم، أو أول رأسين يصلهما في حالة التدنئة.

مثـال:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$\mathbf{Max\ Z=2X_1+4X_2}$$

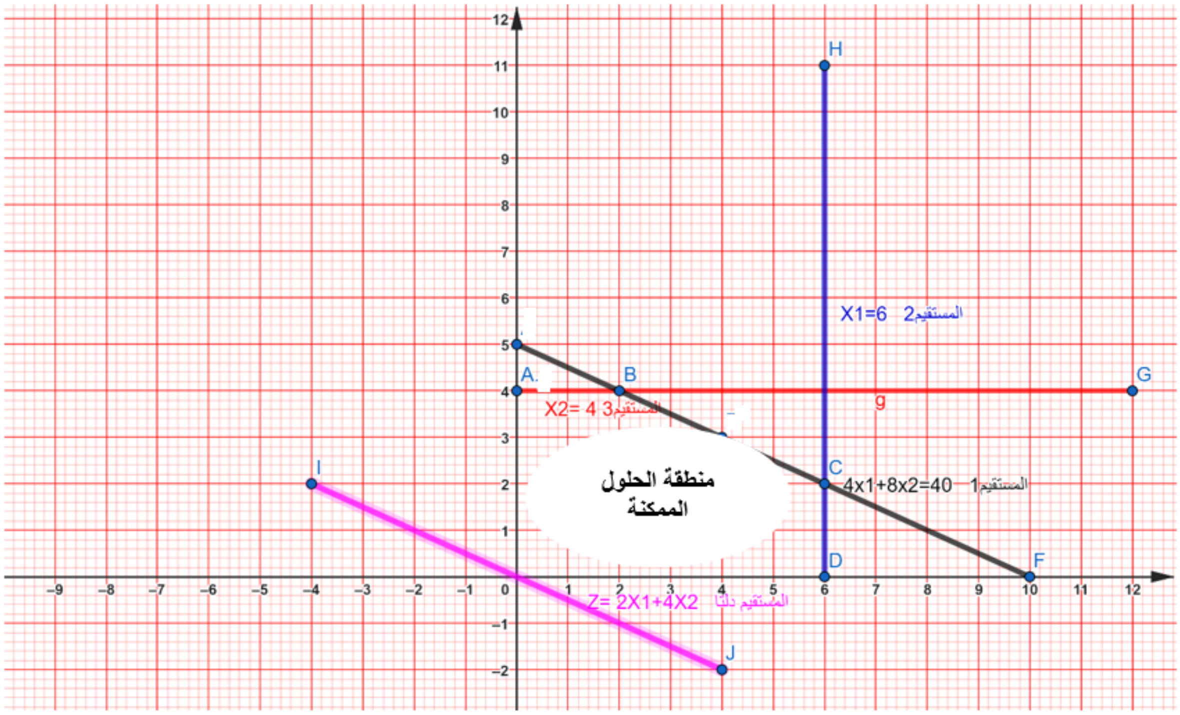
$$\mathbf{s/c}\quad \begin{cases} 4X_1+8X_2 \leq 40 \\ X_1 \leq 6 \\ X_2 \leq 4 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

نجد معادلات المستقيمات الموده هي:

$$4X_1+8X_2= 40$$
$$X_1=6$$
$$X_2=4$$

المستقيم(1)	
$4X_1+8X_2= 40$	
X_1	**X_2**
0	5
10	0

[1] محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية، 2006، ص ص34-36.



عند تحريك المستقيم Δ إلى اليمين فإنه يلتقي مع رأسي منطقة الحل الممكن B و C في نفس الوقت، وبالتالي فإن كلا النقطتين تعطيان حلا أمثلا للدالة الاقتصادية، ويمكن التأكد من ذلك بالتعويض في هذه الدالة.

النقطة B : تعطي $X_1=2$ و $X_2=4$.

وقيمة دالة الهدف عندها هي: $Z=2X_1+4X_2= 2*2+4*4= \mathbf{20}$

النقطة C : تعطي $X_1=6$ و $X_2=2$.

وقيمة دالة الهدف عندها هي: $Z=2X_1+4X_2= 2*6+4*2= \mathbf{20}$

ويلاحظ أن النقطتين أعطيتا نفس القيمة للدالة الاقتصادية، إذ أنه في الواقع ليستا هاتين النقطتين فقط تعطيان أكبر قيمة للدالة الاقتصادية، لكن أية نقطة أخرى موجودة على طول المستقيم BC، فلو أخذنا النقطة **E** على سبيل المثال حيث:

النقطة E : تعطي $X_1=4$ و $X_2=3$.

وقيمة دالة الهدف عندها هي: $Z=2X_1+4X_2= 2*4+4*3= \mathbf{20}$

وهي نفس القيمة المحصل عليها عند رأسي منطقة الحل الممكن.

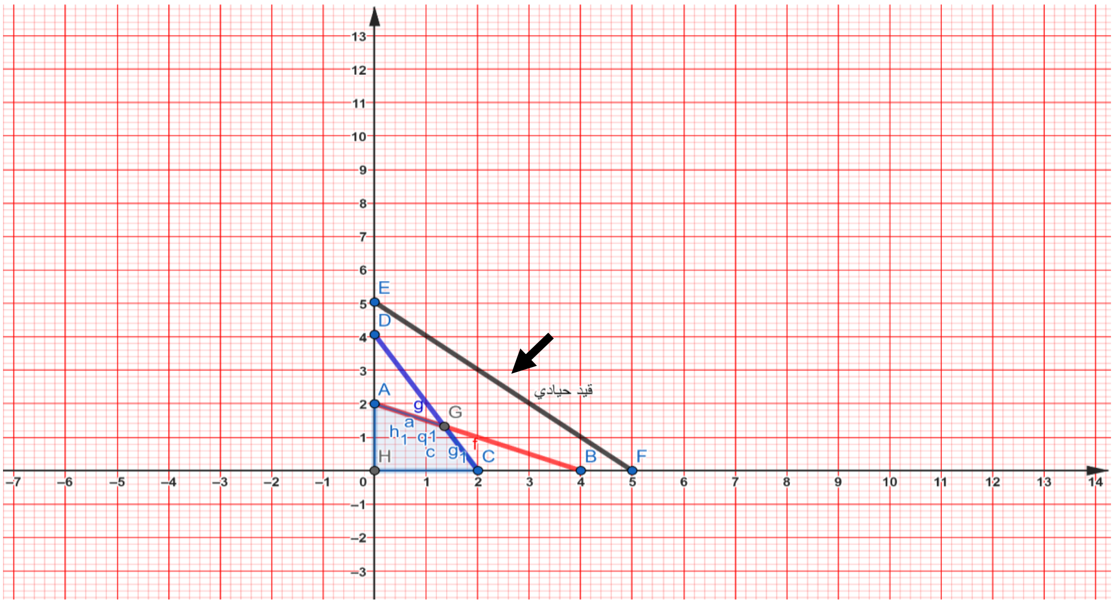
تفيد هذه الحالة المسير في أنها توفر له المرونة في اتخاذ القرار لكونها تتيح له بدائل عديدة، وتصادف هذه الحالة خاصة عندما يكون المستقيم Δ موازيا لأحد المستقيمات المولدة في سقف منطقة الحل الممكن في اتجاه اليمين في حالة التعظيم، أو في أرضية منطقة الحل الممكن في اتجاه اليسار في حالة التدنئة، حينئذ يكون ميل هذا المستقيم وميل المستقيم Δ متساويان.

- **حالة حياد أحد القيود:**

عند تعدد القيود فإنه يمكن أن نجد أحد مستقيمات هذه القيود لا يلمس منطقة الحل الممكن في أية نقطة، وحينها يكون هذا القيد حياديا تماما، حيث يمكن حذفه كلية من البرنامج دون أن يحدث ذلك أي تأثير على النظام، وتظهر هذه الحالة كما في الشكل التالي:

مثال:

$$\boldsymbol{Max(Z) = 2x_1 + 4x_2}$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + 2x_2 \leq 4} \\ \boldsymbol{2x_1 + x_2 \leq 4} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 \leq 5} \\ \boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0} \end{cases}$$



- **حالة استحالة الحل:**

هي الحالة التي تكون فيها القيود متناقضة، حيث لا تتحقق لنا أية منطقة للحل الأمثل.

مثـال:

$$\text{Max } Z=20X_1+4X_2$$

$$\textbf{s/c} \quad \begin{cases} 3X_1+2X_2\leq 10 \\ 4X_1+6X_2\geq 20 \\ X_2\leq 4 \\ X_1\geq 0,\ X_2\geq 0 \end{cases}$$

- **لا نهائية الدالة الاقتصادية:**

في حالة التعظيم تكون غالبية القيود أقل أو تساوي مقدار ثابت، غير أنه في بعض الأحيان يكون هنالك تناقض بين دالة الهدف والقيود، فتكون هذه الأخيرة كلها أكبر أو تساوي في حالة التعظيم، وهذا ما يجعل دالة الهدف تأخذ قيمة لانهائية، ولا يمكن حينئذ تحديد حل نهائي ومحدد للدالة.

مثال:

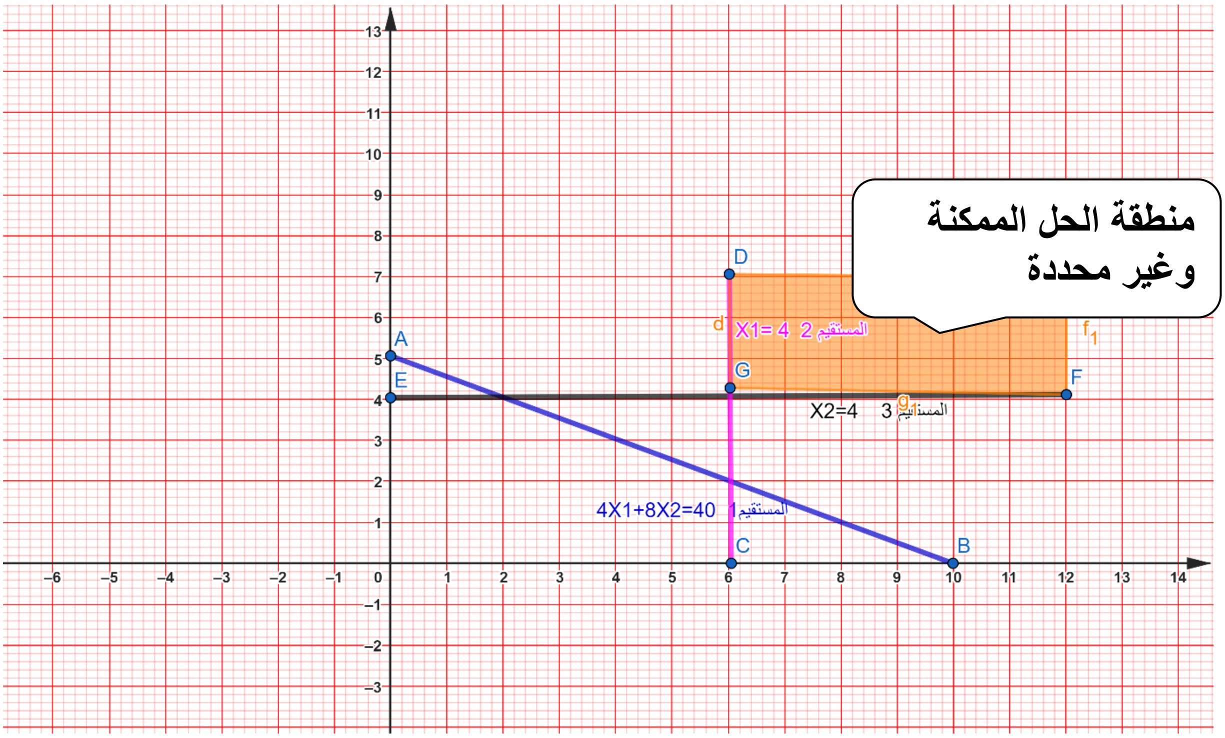
حدد منطقة الحل الممكن للبرنامج التالي وماذا تستنتج؟

$$\text{Max } Z=2X_1+4X_2$$

$$\textbf{s/c}\quad \begin{cases} 4X_1+8X_2\geq 40 \\ X_1\geq 6 \\ X_2\geq 4 \end{cases}$$

$$X_1\geq 0,\ X_2\geq 0$$

وباستعمال الطريقة البيانية، نجد الشكل التالي:



نلاحظ من خلال الشكل السابق أنه توجد منطقة لانهائية تحقق دالة الهدف، فأية قيمة في اتجاه السهم تحقق دالة الهدف، وبالتالي نقول إن دالة الهدف لانهائية.

خلاصة:

- لحل برنامج الخطي باستخدام الطريقة البيانية:
  - أولا: رسـم المتباينات وإيجاد منطقة الحلول الممكنة (المنطقة التي تحقق فيها متغيرات القرار جميع القيود في آن واحد).
  - ثانيا: تحديد نقاط الأركان لمنطقة الحلول الممكنة (إيجاد إحداثيات هذه النقاط).
  - ثالثا: التعويض بنقاط الأركان في دالة الهدف واختيار النقطة التي تعطي الحل الأمثل (أكبر قيمة لدالة الهدف أو أصغر قيمة).
- إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرين، فإن هذا الحل يوجد عند أحد رؤوس مضلع منطقة الحل الممكن.

مثال تطبيقي:

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$\begin{cases} 1X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + 1X_2 \leq 8 \\ -1X_1 + 1X_2 \leq 1 \\ 1X_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة الرسم البياني؟

الحل:

1- تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات:

$$1X_1 + 2X_2 = 6$$
$$2X_1 + 1X_2 = 8$$
$$-1X_1 + 1X_2 = 1$$
$$1X_2 = 2$$

2- تمثيل المعادلات بيانيا:

المستقيم الأول

X_1	X_2
0	3
6	0

المستقيم الثاني

X_1	X_2
0	8
4	0

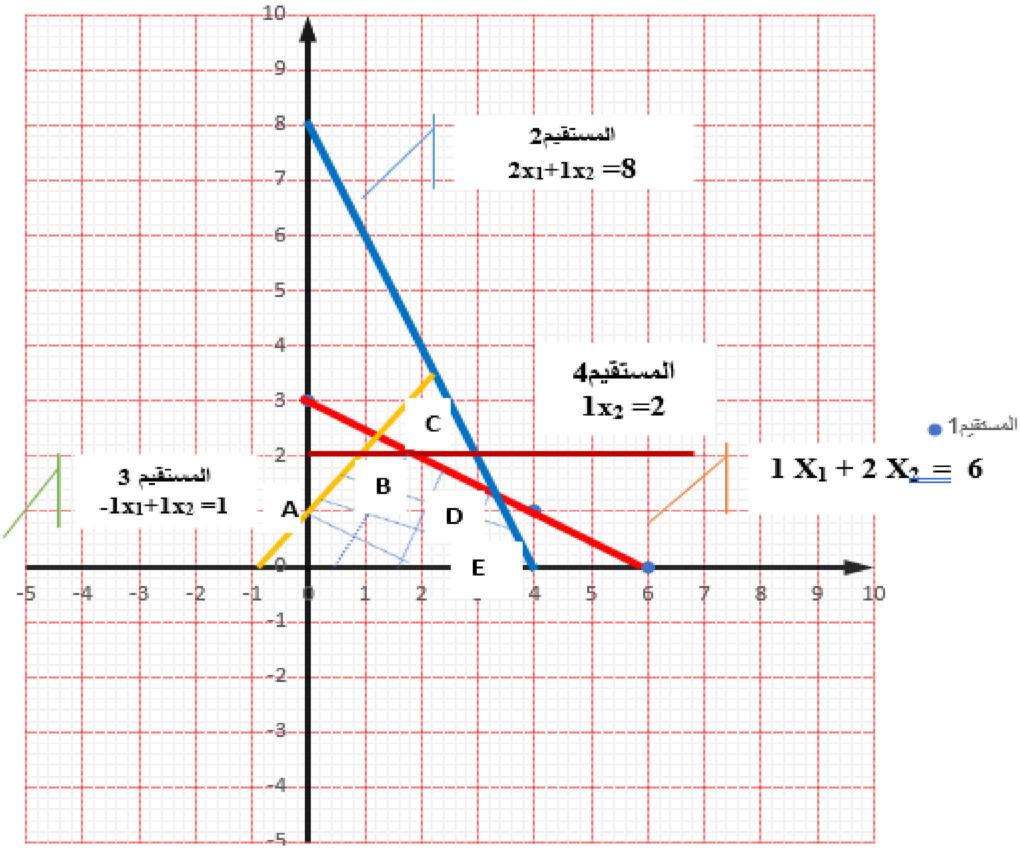
المستقيم الثالث

X_1	X_2
0	1
1-	0

المستقيم الرابع

$X_2 = 2$

منطقة الحلول الممكنة في المنطقة (**ABCDEF**)



الطريقة الأولى: نقوم بتعويض إحداثيات هذه النقاط ونختار النقطة التي تعطينا أفضل قيمة.

النقاط	إحداثيات المتغيرات		قيمة دالة الهدف
	X_1	X_2	$Z= 3X_1 + 2X_2$
0	0	0	**0**
A	0	1	**2**
B	1	2	**7**
C	2	2	**10**
D	10/3	4/3	**38/3**
E	4	0	**12**
F	0	0	**0**

A(0,1) : z = 2

B(1,2) : z = 7

C(2,2) : z = 10

D(10/3,4/3) : z = 38/3

E(4,0) : z = 12

F(0,0) : z = 0

النقطة **F** تعد نقطة مرفوضة لأن هذه النقطة تقود إلى عدم الانتاج وبالتالي النقطة التي تعطينا أفضل قيمة لدالة الهدف هي النقطة (**D** (10/3,4/3 أي:

$X_1= 10/3$ $X_2 = 4/3$ $Z = 38/3$

الطريقة الثانية:

نجعل دالة الهدف معادلة صفرية ونقوم برسم مستقيم لها ثم نقوم بتشكيل خط موازي لمعادلة دالة الهدف ونقوم بتحريكه بشكل موازي اتجاه منطقة الحلول الممكنة، حيث أن آخر نقطة يصل إليها الخط الموازي هي نقطة الحل الأمثل ولا شك في أنها النقطة **D (10/3,4/3)** .

حل البرنامج الخطي– طريقــة السمبلكس أو طريقة الجداول– Simplex Method

طريقة السمبلكس أو طريقة الجداول كما تسمى أحيانا هي طريقة تستخدم سواء كان عدد متغيرات البرنامج الخطي اثنين أو أكثر من ذلك، وهي طريقة تعتمد على خوارزمية تسمى خوارزمية السمبلكس.

طريقة السمبلكس Simplex التي ابتكرها الرياضي george Dantzig عام 1947، وهي عبارة عن أسلوب اختياري تكراري لتحليل مشاكل البرمجة الخطية، ويعتمد هذا الأسلوب على اختيار المتغيرات ذات التأثير الأساسي على كل من دالة الهدف والقيود ويهمل المتغيرات الأخرى التي لا تؤثر على دالة الهدف والقيود.

1– خطوات الحل بطريقة السمبلكس:

للحل بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

أ– التعبير على المسألة في شكل نموذج رياضي أي بناء نموذج رياضي للمسألة.

ب– تحويل النموذج الرياضي للمسألة إلى نموذج معياري في حالة مخالفة ذلك، بمعنى أخر: (إعادة كتابة النموذج الرياضي حسب الشكل القياسي).

ت– إيجاد حل أولي مقبول (Initial feasible Solution).

ث– اختيار الأمثلية، إذا كان الحل أمثل فهو يعتبر مقبولا، والعكس بالعكس.

ج– تحسين الحل المتوصل إليه في حالة عدم كونه حلا أمثلا.

ح– الوصول إلى الحل الأمثل وتفسيره. والشكل الموالي يوضح خطوات العلمية.

باختصار:

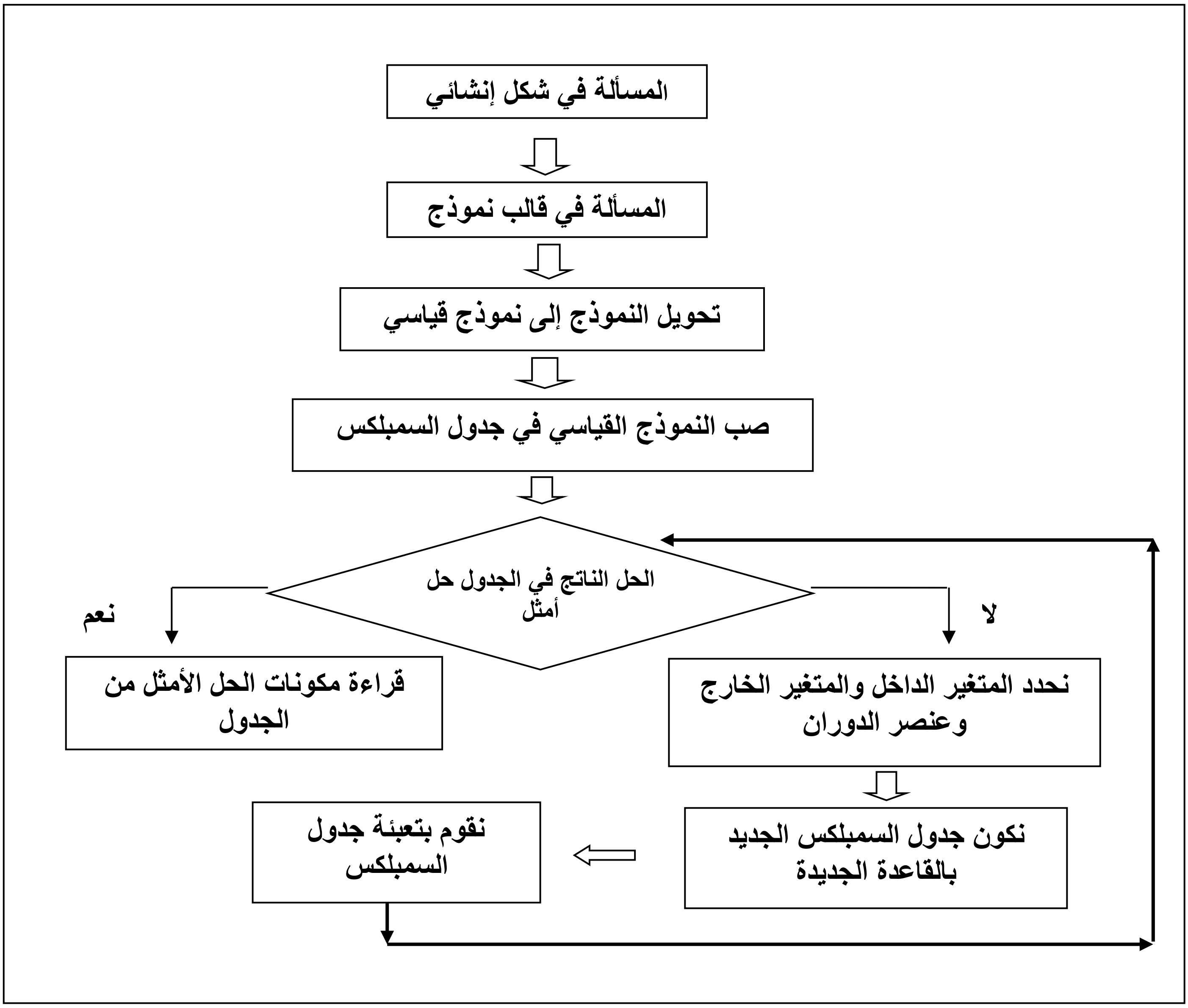
بموجب هذه الطريقة يتم إيجاد حل لمشكلات البرمجة الخطية وفقا لثلاث مراحل أو خطوات أساسية ومتسلسلة على النحو التالي:

أ– كتابة الشكل المعياري أو القياسي للبرنامج الخطي (Standard Form).

ب– إيجاد الحل الأساس أو الأولي (Feasible Solution).

ت– تحسين الحل والوصول إلى الحل الأمثل (Optimum Solution)

شكل يوضح مخطط خوارزمية السمبلكس



المصدر: العايب سهام، محاضرات في رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة محمد الصديق بن يحي، جيجل، 2020-2021، ص20.

وكل خطوة من هذه الخطوات تتشكل من عمليات حسابية تتم في جداول، والتي تأخذ الشكل التالي:

معاملات دالة الهدف c_i	bj	v	c_k
قيم المتغيرات (x_i)	كمية الموارد	القيم الأساسية المجهولة	القيم المقابلة للقيود المجهولة
مصفوفة القيود a_j			
سطر التقييم(Δ)	قيمة دالة الهدف z		

☞ إيجاد الحل في حالة التعظيم:

لإيجاد الحل بطريقة الجداول أو السمبليكس في حالة التعظيم يتم إتباع الخوارزمية والمثال الموالي يشرح بالتفصيل جميع الخطوات:

مثال توضيحي:

يقوم مصنع الحجار للفولاذ والصلب بإنتاج وبيع نوعين من الفولاذ يمر إنتاجهما على ثلاثة أقسام، وتحقق من خلال ذلك عن الطن الواحد ربحا قدره 30دج عن النوع الأول و20دج عن النوع الثاني، وفيما يلي بقية المعلومات المتعلقة بإنتاج طن واحد من كلا النوعين.

	النوع1	النوع 2	الطاقة المتاحة
	عدد الساعات اللازمة	عدد الساعات اللازمة	
القسم1	6سا	6سا	420سا
القسم2	3سا	6سا	300سا
القسم3	4سا	2سا	240سا

المطلوب: إيجاد البرنامج الإنتاجي الأمثل من نوعي الفولاذ الذي يعظم أرباح المؤسسة؟

الحل:

من الواضح المسألة متعلقة بإيجاد الحل في حالة التعظيم (تعظيم أرباح المؤسسة).
خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس:

أ- **بناء النموذج الرياضي:**

نرمز لكمية أو عدد الأطنان من النوع الأول من الفولاذ بـ X_1 .

نرمز لكمية أو عدد الأطنان من النوع الثاني من الفولاذ بـ X_2 .

هدف المؤسسة هي تعظيم أرباحها، ومن ثم تكون دالة الهدف كما يلي:

$$Max(z)= 30\ x_1 + 20\ x_2$$

القيود المفروضة على تحقيق الهدف في كمية الموارد المتاحة والمتمثلة في عدد الساعات المتاحة في كل قسم، وبذلك فإن قيود هذه المسألة تكون كما يلي:

قيد القسم الأول: $6\ x_1 + 6\ x_2 \leq 420$

قيد القسم الثاني: $3\ x_1 + 6\ x_2 \leq 300$

قيد القسم الثالث: $4\ x_1 + 2\ x_2 \leq 240$

شرط عدم سلبية المتغيرات: $X_1, X_2 \geq 0$

ب- تحويل النموذج الرياضي للمسألة إلى نموذج معياري (قياسي).

(تحويل المتراجحات إلى معادلات، في هذه الحالة يتم إجراء بعض التعديلات على القيود من خلال إضافة متغيرات جديدة ونميز في هذه الحالة بين ثلاث أنواع من القيود:

- قيد من الشكل أقل من أو تساوي(≤): نضيف إلى الطرف الأقل متغير جديد يسمى **"متغير الفجوة" أو بالمتغيرات الخاملة أو الراكدة Slack Variable** ويرمز له بالرمز **(s)** ويعبر عن مدى النقص الذي يعانيه أحد أطراف القيد ويضاف هذا المتغير في دالة الهدف بمعامل صفر.

- قيد من الشكل أكبر من أو تساوي(≥): نضيف **"متغير الفجوة" أو "متغير الفروق"** ويرمز له بالرمز **(s)** إلى الطرف الأقل ، كما نضيف كذلك متغير آخر نسميه " **المتغير الاصطناعي**" في الجهة اليسرى للقيد نرمز له بالرمز **(A)** وهو عبارة عن متغير وهمي تم وضعه لتسهل حل النموذج وليس لوجوده أي معنى لذلك من الأفضل أن لا يظهر في الحل النهائي المتضمن للحل الأمثل.

ويضاف هذا المتغير " **المتغير الاصطناعي**" في دالة الهدف بمعامل كبير جدا نرمز له بالرمز **(M)** مع إشارة سالبة. أما بالنسبة للمتغيرات الفجوة التي تم اضافتها في الطرف الأيمن للقيد نعيدها للطرف الايسر مع تغيير الإشارة إلى إشارة سالبة.

- قيد من الشكل تساوي(=): في هذه الحالة نضيف متغير اصطناعي فقط.

وعليه نبحث عن الصيغة النموذجية(معياري)، بحيث نجد مصفوفة للقيود تتضمن مصفوفة أحادية:

يمثل متغير "متغير الفجوة" الفرق بين الطاقة المتاحة والطاقة المستغلة أي أنه يمثل طاقة غير مستغلة عندئذ تصبح القيود كما يلي:

قيد القسم الأول: $6x_1 + 6x_2 + s_1 = 420$

قيد القسم الثاني: $3x_1 + 6x_2 + s_2 = 300$

قيد القسم الثالث: $4x_1 + 2x_2 + s_3 = 240$

شرط عدم السلبية المتغيرات: $X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

أما الربح الناتج عن متغيرات الفروق فهو يساوي الصفر، وبذلك يمكن كتابة دالة الهدف كما يلي:

$$\text{Max}(z) = 30x_1 + 20x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

ملاحظة: في حالة وجود ثوابت سالبة (الجانب الأيمن من القيود في النموذج المعياري) يجب تحويلها إلى قيم موجبة عن طريق ضرب المتراجحة في (–1) وعكس إشارة المتراجحة أي أكبر أو تساوي تصبح أصغر أو تساوي والعكس صحيح.

ت– **إيجاد حل أولي مقبول:**

لإيجاد حل أولي مقبول يمكن أن نفرض حالة ألا إنتاج أي عدم وجود أي إنتاج، أي أن X_1 (المنتوج الأول) و X_2 (كمية المنتوج الثاني) تساوي الصفر، وبالتالي يكون الحل الأولي كما يلي:

قيد القسم الأول: $S_1= 420$

قيد القسم الثاني: $S_2= 300$

قيد القسم الثالث: $S_3= 240$

دالة الهدف: z بتعويض قيم X_1 و X_2 نجد دالة الهدف تساوي الصفر ومن ثم لم يتم تحقيق أي ربح.

وبما أنه لا يوجد أي خلل في هذا الحل الأولي (مثل وجود قيم سالبة أو قيم غير منطقية...إلخ) فهو يعتبر حلا أوليا مقبولا ويمكن نقله لجدول السمبلكس.

ث– **نقل معطيات الحل الأولي في جدول** هو "**جدول الحل الأساسي الأول**"، فيه تكون متغيرات الفجوة كمتغيرات أساس "**رئيسية**" أو متغيرات داخل الأساس (قيمتها عند بداية الحل هي المقابلة لها في عمود الثوابت)، أما المتغيرات الحقيقية فنعتبرها متغيرات خارج الأساس (قيمتها في الجدول الأول معدومة)، وتكون قيمة دالة الهدف أيضا معدومة فإن صيغته النموذجية هي:

$$Max(z)= 30\ x_1 +20\ x_2 + 0S_1 +0S_2 + 0S_3$$

$$6\ x_1 +6\ x_2 + s_1 = 420$$

$$3\ x_1 +6\ x_2 + s_2 = 300$$

$$4\ x_1 +2\ x_2 + s_3 = 240$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

الشكل المصفوفي يكون كما يلي:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \mathbf{s_1} & \mathbf{s_2} & \mathbf{s_3} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الجدول 1:

عمود 1	عمود 2	عمود 3	عمود 4	عمود 5	عمود 6	عمود 7	عمود 8
ربح/وحدة (معاملات المتغيرات في دالة الهدف) c_j	متغيرات الأساس v (المتغيرات) المشكلة لمصفوفة (الوحدة) X_I	الكمية Q (عمود الثوابت=الطرف الأيمن للقيود) b_i	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
			30	20	0	0	0
0	S_1	420	6	6	1	0	0
0	S_2	300	3	6	0	1	0
0	S_3	240	4	2	0	0	1
		$z = 0$ قيمة دالة الهدف Z_i=	0	0	0	0	0
		$\Delta z = c_j - z_i$	30	20	0	0	0

متغير الخارج: أصغر حاصل قسمة عمود3 على معاملات العمود الداخل

المتغير الداخل: عمود المحور أكبر قيمة موجبة في السطر الأخير

قيم موجبة وليست سالبة
30-0=30
20-0=20

هي حاصل ضرب وجمع العمليات التالية:ضرب وجمع الأرقام الموجودة في العمود **1** في الأرقام الموجودة في كل عمود من الأعمدة4،5،6،7،8

نتوصل إلى الحل الأمثل في حالة Max عندما تكون **جميع قيم السطر الأخير سالبة أو معدومة**. وبما أن السطر الأخير في الجدول السابق ليست كلها سالبة أو معدومة فإننا لم نتوصل إلى الحل الأمثل بعد ولابد من عملية تحسين الحل.

ج- تحسين الحل:

تتضمن عملية التحسين ما يلي:

- إيجاد المتغير الداخل للحل أي إيجاد المنتوج الواجب إنتاجه في بداية الحل:

يتم إيجاد المتغير الداخل عن طريق **اختيار أكبر قيمة موجبة في السطر الأخير** من الجدول لأنها تحقق ربحا أكبر.

وبذلك يكون المتغير الداخل إلى الحل هو X_1 ويسمى عموده " **بعمود المحور**" أو بعمود عنصر الارتكاز أو العمود الأمثل.

- إيجاد المتغير الخارج من الحل:

يتم إيجاد **المتغير الخارج** عن طريق تقسيم القيم الموجودة في عمود الكمية(عمود3) على الأرقام المعاملات المقابلة لها في عمود المحور ثم نختار أصغر حاصل قسمة لأنه يحقق جميع قيود المسألة. ويعرف "**بصف المحور**".

صف S_1: $420 : 6 = 70$

صف S_1: $300 : 3 = 100$

صف S_1: $240 : 4 =$ **60** -----**أصغر قيمة**

كما يطلق على نقطة تقاطع عمود المحور X_1 مع صف المحور **S_3** "**بنقطة المحور**" وهي تساوي 4.

جدول الحل الأساسي الموالي يتم إعداده كما يلي:

ربح/وحدة (معاملات المتغيرات في دالة الهدف) c_j	متغيرات الأساس V (المتغيرات المشكلة لمصفوفة الوحدة) X_I	الكمية Q (عمود الثوابت=الطرف الأيمن للقيود) b_i	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
			30	20	0	0	0
0	S_1	420	6	6	1	0	0
0	S_2	300	3	6	0	1	0
0	S_3	240	4	2	0	0	1
Z_i=قيمة دالة الهدف $z = 0$			0	0	0	0	0
$\Delta z = c_j - z_i$			30	20	0	0	0

الجدول الثاني:(تحسين الحل)

ربح/وحدة (معاملات المتغيرات في دالة الهدف) c_j	متغيرات الأساس v (المتغيرات) المشكلة لمصفوفة (الوحدة) X_I	الكمية Q (عمود الثوابت=الطرف الأيمن للقيود) b_i	[illegible]	[illegible]	[illegible]	S_2	S_3
			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0
0	S_1	420	6	6	1	[illegible]	0
0	S_2	300	3	6	0	1	[illegible]
0	S_3	240	4	2	0	0	1
		$z = 0$ قيمة دالة الهدف $Z_i=$	0	0	0	0	0
		$\Delta z = c_j - z_i$	30	20	0	0	0

420- (240*6) ÷ 4= 60

الانتقال إلى جدول جديد

عمود الكمية3

ربح/وحدة (معاملات) المتغيرات في دالة الهدف) c_j	متغيرات الأساس v (المتغيرات) المشكلة لمصفوفة (الوحدة) X_I	الكمية Q (عمود الثوابت=الطرف الأيمن للقيود) b_i	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
			30	20	0	0	0
0	S_1	?					
0	S_2	?					
30	X_1	60	4÷4=1	2÷4=1/2	0÷4=0	0÷4=0	1÷4= 1/4
		$z = ?$ قيمة دالة الهدف $Z_i=$					
		$\Delta z = c_j - z_i$					

– يأخد المتغير الداخل X_1 مكانه في الجدول محل **المتغير الخارج** **S3** ويأخذ قيما جديدة يمكن حساها عن طريق : قسمة كل قيمة في صف المحور على نقطة المحور في الجدول السابق.

عمود الكمية رقم 3	4 ÷ 240	= 60
عمود رقم 4	4 ÷ 4	= 1
عمود رقم 5	4 ÷ 2	= 1/2
عمود رقم 6	4 ÷ 0	= 0
عمود رقم 7	4 ÷ 0	= 0
عمود رقم 8	4 ÷ 1	= 1/4

– حساب القيم الجديدة للصفوف المتبقية:

القاعدة:

العنصر الجديد = العنصر القديم –[(العنصر المقابل في صف المحور x القيمة المقابلة في عمود المحور)]÷ نقطة المحور

		القيمة القديمة		نقطة المحور	القيمة الجديدة
قيمة العمود 3	الصف الأول	420	−(6*240)÷	4	60 =
	الصف الثاني	300	−(3*240)÷	4	120=
قيمة العمود 4	الصف الأول	6	−(6*4)÷	4	0=
	الصف الثاني	3	−(3*4)÷	4	0=
قيمة العمود 5	الصف الأول	6	−(6*2)÷	4	3=
	الصف الثاني	6	−(3*2)÷	4	9/2=
قيمة العمود 6	الصف الأول	1	−(6*0)÷	4	0=
	الصف الثاني	0	−(3*0)÷	4	1=
قيمة العمود 7	الصف الأول	0	−(6*0)÷	4	0=
	الصف الثاني	1	−(3*0)÷	4	1=
قيمة العمود 8	الصف الأول	0	−(6*1)÷	4	3/2−=
	الصف الثاني	0	−(3*1)÷	4	3/4−=

وعليه يتم الحصول على الجدول:

ربح/وحدة (معاملات) المتغيرات في دالة الهدف) c_j	متغيرات الأساس **v** (المتغيرات) المشكلة لمصفوفة الوحدة) X_i	الكمية **Q** (عمود) الثوابت=الطرف الأيمن للقيود) b_i	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3
			30	20	0	0	0
0	S_1	60	0	3	1	0	-3/2
0	S_2	120	0	9/2	0	1	-3/4
30	X_1	60	1	1/2	0	0	1/4
z = 1800 قيمة دالة الهدف Z_j=			30	15	0	0	7.5
$\Delta z = c_j - z_i$			0	**5**	0	0	-7.5

قيمة موجبة
وليست سالبة
20-15=5

لم نتوصل إلى الحل الأمثل بعد ولابد من مواصلة عملية التحسين.

ح- **الوصول إلى حل الأمثل:**

بنفس الطريقة السابقة المتغير الخارج فسيكون أصغر حاصل قسمة قيم العمود 3 على قيم العمود 5(عمود المحور) وهو المتغير S_1 حيث أن:

$$60 \div 3 = \mathbf{20}$$

$$120 \div 9/2 = 26.67$$

$$60 \div ½ = 120$$

العمود (المتغير الداخل) عن طريق اختيار أكبر قيمة موجبة في السطر الأخير من الجدول لأنها تحقق ربحا أكبر. وهو المتغير x_2 .

وبذلك يكون الجدول الثالث كما يلي:

الجدول رقم 3:

ربح/وحدة (معاملات المتغيرات في دالة الهدف c_j	متغيرات الأساس v (المتغيرات) المشكلة لمصفوفة (الوحدة) X_I	الكمية Q (عمود) الثوابت=الطرف الأيمن للقيود) b_i	X_1 30	X_2 20	S_1 0	S_2 0	S_3 0
20	X_2	20	0	1	1/3	0	-1/2
0	S_2	30	0	0	-3/2	1	3/2
30	X_1	50	1	0	-1/6	0	1/2
z = 1900	قيمة دالة الهدف	Z_j=	30	20	5/3	0	5
		$\Delta z = c_j - z_i$	**0**	**0**	**-5/3**	**0**	**-5**

نلاحظ أن جميع قيم السطر الأخير من الجدول الثالث هي سالبة أو معدومة، وبذلك يمكن القول لنا أننا توصلنا إلى الحل الأمثل، ويمكن قراءة الحل على النحو التالي:

- متغيرات الحل :

$$S_2 = 30 \qquad X_2 = 20 \qquad X_1 = 50$$

أي أنه سيتم إنتاج 50 وحدة من المنتوج الأول و 20 وحدة من المنتوج الثاني وتبقى طاقة غير مستغلة من المورد الثاني (القسم الثاني) تقدر بـ 30 ساعة.

- الربح الإجمالي الذي يحققه هذا البرنامج الإنتاجي يقدر بـ 1900 دج ويمكن قراءته من ضرب قيم العمود1 في قيم العمود3 وجمعها.

$$(20*20)+(0*30)+(30*50)=\mathbf{1900}$$

- الأرقام الموجودة في السطر الأخير من الجدول تدل على ما يلي:

- الصفر الموجود في السطر الأخير لكل من العمود 4، 5 و7 هي نتيجة لإدخال المتغيرات في الحل النهائي. أي أن متغيرات الحل النهائي لابد أن تكون قيمها صفرا في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل. أما السطر الأخير لكل من الأعمدة 6 و7 و 8 فهي تقيس تكلفة قيود الموارد المتاحة الثلاثة في الأقسام الثلاثة في حالة زيادة وحدات منها أو انخفاضها بوحدات أيضا وتأثير ذلك على البرنامج الإنتاجي الأمثل وعلى إجمالي الأرباح المحققة، وذلك ما يطلق عليه بالربح الحدي أو التكلفة الحدية.

ملاحظات:

1- تكون جميع معاملات متغيرات القرار في الحل النهائي في نقاط تقاطع صفوفها مع أعمدتها مساوية لـ 1 وبقية المعاملات في العمود مساوية لصفر.

2- عند إيجاد المتغير الداخل، قد نجد أن هناك متغيرين داخلين أي لهما نفس المقدار في السطر الأخير من الجدول، عندئذ يتم اختيار أحدهما عشوائيا ليكون متغيرا داخلا.

3- عند إيجاد المتغير الخارج، قد يكون أصغر حاصل قسمة متساوي لمتغيرين أو أكثر، عندئذ يتم اختيار أحدهما عشوائيا ليكون متغيرا خارجا.

4- إن دخول أي متغير للحل أثناء عملية التحسين لا يعني بالضرورة أنه سيبقى في الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل، بل قد يصبح متغيرا خارجا في أية عملية تحسين لاحقة.

5- في حالة وجود معاملات سالبة أو معدومة في عمود المحور فإنه يجب إهمالها والتركيز على المعاملات الموجبة فقط. أما إذا كانت كلها سالبة أو معدومة فذلك يعني عدم إمكانية تحيد المتغير الخارج وبالتالي لا يكون هناك حل للمسألة والسبب قد يعود إلى سوء صياغة المسألة.

6- لا يقتصر استغلال المعطيات الواردة في سطر التقييم من جدول الحل الأمثل على إبراز أمثلية الحل من عدمها بل يمتد إلى إيفادنا ببعض المعلومات المفيدة في التنبؤ بأثر التغيرات التي قد تحدث في المعطيات الرئيسية للمسألة على النتيجة النهائية.

☞ **إيجاد الحل في حالة التخفيض (التدنئة)Min:**

لإيجاد الحل بطريقة الجداول أو السمبلكس في حالة التدنئة (تخفيض التكاليف، المسافات، الزمن...إلخ) يتشابه مع حل البرمجة الخطية في حالة التعظيم مع بعض الاختلافات القليلة.

الهدف في هذه الحالة يتعلق بتخفيض دالة الهدف أي إيجاد أصغر قيمة ممكنة لها. كما أن مسائل التخفيض مرتبطة بشكل عام بقيود من نوع أكبر أو تساوي وبذلك يكمن الاختلاف في العناصر الأساسية التالية:

- تكون معاملات المتغيرات الاصطناعية **A** في دالة الهدف في حالة التخفيض **+M** بحيث تعمل عكس الهدف المتمثل في تدنية التكاليف.
- يتم إيجاد المتغير الخارج باختيار **أصغر قيمة** في السطر الأخير من الجدول.
- نتوصل إلى الحل الأمثل في مسائل التخفيض Min عندما تكون جميع قيم السطر الأخير من جدول السمبلكس **موجبة أو معدومة**.
- أما بقية الخطوات فهي مماثلة لحالة التعظيم.

مثال توضيحي:

تلقت الشركة الوطنية للمواد الكميائية طلبية قدرها 1000 كلغ من خليط الطلاء الذي يتكون من مادتين M_1 وM_2 حيث يكلف الكلغ من المادة الأولى 50دج ومن المادة الثانية 60دج، كما أنه ولأسباب تتعلق بمعايير الجودة فإن الشركة مقيدة بضرورة استعمال 150 كلغ على الأقل من المادة الأولى.

المطلوب:

تحديد الكميات الواجب استعمالها من المادتين لإنتاج الخليط بأقل تكلفة باستعمال طريقة السمبلكس؟

الحل:

1- الخطوة الأولى: بناء النموذج الرياضي:

أ- **تحديد المتغيرات:**

-نرمز للكمية الواجب استعمالها من المادة M_1 من الخليط النهائي بـ X_1 .

-نرمز ز للكمية الواجب استعمالها من المادة M_2 من الخليط النهائي بـ X_2 .

ب- **هدف المؤسسة** هي تخفيض التكاليف، ومن ثم تكون دالة الهدف كما يلي:

$$Min(c)= 50\ x_1 + 60\ x_2$$

ت- تحديد القيود:

القيود المفروضة على تحقيق الهدف وبذلك فإن قيود هذه المسألة تكون كما يلي:

قيد الطلبية: $x_1 + x_2 = 1000$

قيد الحد الأدنى من المادة M_1: $x_1 \geq 150$

قيد عدم السلبية : $X_1, X_2 \geq 0$

2- **تحويل النموذج الرياضي للمسألة إلى نموذج معياري.**

- **قيد من الشكل أكبر من أو تساوي**($\geq$): نضيف **"متغير الفجوة" أو "متغير الفروق"** ويرمز له بالرمز (s) إلى الطرف الأقل ، كما نضيف كذلك متغير آخر نسميه " **المتغير الاصطناعي**" في الجهة اليسرى للقيد نرمز له بالرمز (A) وهو عبارة عن متغير وهمي تم وضعه لتسهل حل النموذج وليس لوجوده أي معنى لذلك من الأفضل أن لا يظهر في الحل النهائي المتضمن للحل الأمثل.

ويضاف هذا المتغير " المتغير الاصطناعي" في دالة الهدف بمعامل كبير جدا نرمز له بالرمز (**M**) مع إشارة سالبة.

أما بالنسبة للمتغيرات الفجوة التي تم اضافتها في الطرف الأيمن للقيد نعيدها للطرف الايسر مع تغيير الإشارة إلى إشارة سالبة.

- قيد من الشكل تساوي (=): في هذه الحالة نضيف متغير اصطناعي فقط.

وعليه نبحث عن الصيغة النموذجية(معياري)، عندئذ تصبح القيود كما يلي:

قيد الطلبية: $x_1 + x_2 = 1000$

شكل المساواة وبالتالي يبقى على حاله.

القيد الثاني: $x_1 = 150 + S_1$

وهو يكافؤ $x_1 - S_1 = 150$

قيد عدم السلبية المتغيرات: $X_1, X_2, S_1 \geq 0$

وبذلك يمكن كتابة دالة الهدف كما يلي:

$$\mathbf{Min(c)= 50\, x_1 + 60\, x_2 + 0S_1}$$

3- **الخطوة الثالثة: إيجاد حل أولي مقبول**

لإيجاد حل أولي مقبول يمكن أن نفرض حالة ألا إنتاج أي حالة اللاعمل ، أي أن X_1 و X_2 تساوي الصفر، وبالتالي يكون الحل الأولي كما يلي:

قيد الأول: !!!!???? ... **0+0= 1000**

قيد الثاني: $0 - S_1 = 150$ أي أن: $\mathbf{S_1 = -150}$

وهذه كمية سالبة وتخرق شرط عدم سلبية المتغيرات.

بما أن القيدين الأول والثاني غير محققين أي غير مقبولين، فيمكن القول أنه لا يوجد حاليا حل أولي مقبول.

وبما أنه لا يوجد حل أولي مقبول، يمكن اللجوء إلى حل أولي إصطناعي(**خيالي**) مقبول وذلك عن طريق إضافة متغيرات اصطناعية للقيود الغير محققة (القيدين الأول والثاني) ونرمز لهما بالحرف **A** كما يلي:

قيد الطلبية: $x_1 + x_2 + A_1 = 1000$

القيد الثاني: $x_1 - S_1 + A_2 = 150$

قيد عدم السلبية المتغيرات: $X_1, X_2, S_1, A_1, A_2 \geq 0$

وبما أن هذه المتغيرات الاصطناعية دخيلة على المسألة وتستعمل لإيجاد حل أولي فقط فيجب التخلص منها حتى لا تظهر في الحل الأمثل وذلك عن طريق تحميلها بمعامل كبير (رقم كبير مليون، مليار....) نرمز له بـ (M) في دالة الهدف ويعمل

عكسها تماما بحيث **يكون موجبا في حالات التخفيض** وسالبا في حالات التعظيم، وبذلك تكون دالة الهدف في هذه الحالة كما يلي:

$$\mathbf{Min(c)= 50\, x_1 +60\, x_2 + 0S_1 + MA_1 +MA_2}$$

أما إيجاد الحل الأولي الاصطناعي فيكون عن طريق وضع كل المتغيرات X_1 ، X_2، S_1 مساوية للصفر فتكون القيود كما يلي:

- **القيد الأول:** $A_1 = 1000$
- **القيد الثاني:** $A_2 = 150$

فهو يعتبر **حلا أوليا مقبولا** ويمكن نقله لجدول السمبلكس.

4- **الخطوة الرابعة: نقل معطيات الحل الأولي في** جدول هو**(جدول الحل الأساسي الأول)**:

$$\mathbf{Min(c)= 50\, x_1 +60\, x_2 + 0S_1 + MA_1 +MA_2}$$

$x_1 + x_2 + A_1 \quad = \quad 1000$

$x_1 \; - \; S_1 + A_2 = \; 150$

$(x_1, x_2, S_1, A_1, A_2\,) \geq 0$

الجدول 1:

(معاملات المتغيرات في دالة الهدف) c_j	متغيرات الأساس v (المتغيرات) المشكلة لمصفوفة (الوحدة) X_I	الكمية Q (عمود الثوابت=الطرف الأيمن للقيود) b_i	X_1	X_2	S_1	A_1	A_2
			50	60	0	+M	+M
M	A_1	1000	1	1	0	1	0
M	A_2	150	1	0	-1	0	1
C = 1150M قيمة دالة الهدف Z_j=			2M	M	-M	M	M
$\Delta z= c_j-z_i$			50-2M	60-M	+M	0	0

5- **الخطوة الخامسة: اختبار أمثلية الحل المتوصل**

نتوصل إلى الحل الأمثل في حالة التخفيض Min عندما تكون جميع **قيم السطر الأخير موجبة أو معدومة**، وبما أن قيم السطر الأخير في الجدول السابق ليست كلها موجبة أو معدومة فإننا لم نتوصل إلى حل الأمثل بعد ولا بد من عملية تحسين الحل.

6- الخطوة السادسة: تحسين الحل

بما أن الحل الأولي يحمل المؤسسة تكاليف باهظة $1150M$ حيث M رقم كبير جدا، فلا بد من تخفيض التكاليف عن طريق إخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل، وللقيام بذلك، تتضمن عملية التحسين ما يلي:

- **إيجاد المتغير الداخل للحل:**

يتم إيجاد المتغير الداخل عن طريق اختيار **أصغر** قيمة في السطر الأخير من الجدول لأنها تحقق أقل تكلفة.

وبذلك يكون المتغير الداخل إلى الحل هو X_1 لأنه أصغر رقم ولو بالسالب ويسمى عموده " بعمود المحور" أو بعمود عنصر الارتكاز أو العمود الأمثل.

- **إيجاد المتغير الخارج من الحل:**

بقية الخطوات هي نفسها كما في حالة التعظيم

يتم إيجاد المتغير الخارج عن طريق تقسيم القيم الموجودة في عمود الكمية(العمود3) على الأرقام المعاملات المقابلة لها في عمود المحور ثم نختار أصغر حاصل قسمة لأنه يحقق جميع قيود المسألة. ويعرف "**بصف المحور**".

صف C: $1000 \div 1 = 1000$

صف D: $150 \div 1 = 150$

صف D: $150 \div 1 = 150$ ------أصغر قيمة وبذلك المتغير : A_2 هو المتغير الخارج من الحل.

كما يطلق على نقطة تقاطع عمود المحور X_1 مع صف المحور A_2 "بنقطة المحور" وهي تساوي 1.

جدول الحل الأساسي الموالي يتم إعداده كما يلي:

(معاملات المتغيرات في دالة الهدف) c_j	متغيرات الأساس v (المتغيرات المشكلة لمصفوفة الوحدة) X_I	الكمية Q (عمود الثوابت=الطرف الأيمن للقيود) b_i	X_1	X_2	S_1	A_1	A_2
			50	60	0	+M	+M
M	A_1	1000	1	1	0	1	0
M	A_2	150	1	0	-1	0	1
$C = 1150M$ قيمة دالة الهدف Z_i=			2M	M	-M	M	M
$\Delta z = c_j - z_i$			50-2M	60-M	+M	0	0

الجدول الثاني:(تحسين الحل)

الانتقال إلى جدول جديد

معاملات المتغيرات في دالة الهدف) c_j	v (المتغيرات) المشكلة لمصفوفة (الوحدة) X_I	الكمية Q (عمود) الثوابت=الطرف الأيمن للقيود) b_i	X_1	X_2	S_1	A_1	A_2
			50	60	0	+M	+M
M	A_1	850	0	1	+1	1	-1
50	$\mathbf{X_1}$	150	1	0	-1	0	1
قيمةZ_i= دالة الهدف = C 850M+7500			50	M	M-50	M	-M+50
$\Delta z= c_j-z_i$			0	60-M	-M+50	0	+2M+50

7- **الخطوة السابعة: اختيار أمثلية الحل**

نلاحظ أن جميع قيم السطر الأخير في الجدول ليست موجبة أو معدومة وبالتالي لابد من عملية التحسين مرة أخرى.

8- **الخطوة الثامنة: عملية التحسين**

-**إيجاد المتغير الداخل:** أصغر رقم في السطر الأخير. من ثم المتغير S_1 هو المتغير الداخل.

- **إيجاد المتغير الخارج:** أصغر حاصل قسمة موجبة هو 850 وبذلك يكون المتغير A_1 هو المتغير الخارج.

وعليه يتم الحصول على الجدول:

الجدول رقم 3:

معاملات المتغيرات في دالة الهدف) c_j	v (المتغيرات) المشكلة لمصفوفة (الوحدة) X_I	الكمية Q (عمود) الثوابت=الطرف الأيمن للقيود) b_i	X_1	X_2	S_1	A_1	A_2
			50	60	0	+M	+M
0	$\mathbf{S_1}$	850	0	1	+1	1	-1
50	$\mathbf{X_1}$	1000	1	1	0	1	0
قيمةZ_i= دالة الهدف C = 50000			50	50	0	50	0
$\Delta z= c_j-z_i$			0	10	0	+M-50	+M

جميع قيم السطر الأخير من الجدول موجبة أو معدومة

إذا يمكن القول أن جميع قيم السطر الأخير من الجدول موجبة أو معدومة ومن ثم فقد توصلنا إلى الحل الأمثل وهو كما يلي:

- متغيرات الحل النهائي تتمثل في المتغير X_1 ومقداره 1000 كلغ ومتغير الزيادة عن الحد الأدنى المطلوب S_1 ومقداره 850 كلغ.
- دالة الهدف وتتمثل في تكلفة كلية قدرها 50000دج.
- بقية المتغيرات = 0 لأنها خارج الحل الأمثل.

9- الخطوة التاسعة: التأكد من الحل

- **دالة الهدف:**

$$\mathbf{Min(c)= 50\, x_1 + 60\, x_2 + 0S_1 + MA_1 + MA_2}$$

$$\mathbf{Min(c)}= 50\,(1000) + 60\,(0) + 0(850) + M(0) + M(0) = \mathbf{50000}$$

- **القيود:**

القيد الأول:

قيد الطلبية:

$$x_1 + x_2 + A_1 = 1000$$
$$1000+0+0 = 1000$$

القيد الثاني:

$$\mathbf{x_1 - S_1 + A_2 = 150}$$

$$\mathbf{1000 - 850 + 0 = 150}$$

- **شرط عدم سلبية المتغيرات:**

$$X_1, X_2, S_1, A_1, A_2 \geq 0$$

جميع قيم المتغيرات معدومة أو موجبة.

إذا جميع القيود محققة والحل صحيح.

☞ **البرمجة الخطية – طريقة السمبليكس أو طريقة الجداول– حالات خاصة**

أثناء البحث عن الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية تظهر حالات خاصة تنجم عن عدم الدقة في صياغة النماذج الرياضية أو في تحديد العوامل المؤثرة على المسألة موضوع البحث، ومن أهم هذه الحالات:

1-عدم وجود حل: Infeasibility

تعني هذه الحالة عدم وجود حل لمشكلة البرمجة الخطية بشكل يفي باحتياجات جميع القيود، أي عدم وجود حل ممكن، وتحدث هذه الحالة إذا كانت مشكلة البرمجة الخطية تضم قيودا متعارضة، عند استخدام طريقة السمبلكس نصل إلى جدول الحل الأمثل حيث يكون أحد المتغيرات الاصطناعية ضمن الحل الأساسي بقيمة موجبة، فقاعدة السمبلكس تشترط عند الحل الأمثل خروج كل المتغيرات الاصطناعية.

2-عدم محدودية الحل : Unboundeness

تحدث هذه الحالة عندما تكون دالة الهدف من نوع تعظيم، حيث يمكن زيادة أحد العوامل الداخلة في الحل بشكل غير محدود وبالتالي زيادة الأرباح إلى ما لا نهاية، إذا حدث أن واجهنا هذه الحالة في الحياة العملية فهذا يعني أن مشكلة البرمجة الخطية قد صيغت بطريقة غير مناسبة، لأنه من المستحيل عمليا زيادة الأرباح بشكل لا محدود، يستدل على عدم محدودية الحل بطريقة السامبلكس عندما يمكن تحديد المتغير الداخل ولا يمكن تحديد المتغير الخارج، بسبب أن كافة قيم العمود المحوري صفرية أو سالبة الأمر الذي يترتب عليه أن تصبح كافة قيم المتغيرات الخارجة سالبة أو غير معرفة، والتي تشترط طريقة السامبلكس إهمالهم.

3-تعدد الحلول المثلى:Alternate Optimal Solution

عند وجود حلين أمثلين أو أكثر لمشكلة البرمجة الخطية، نقول بأن هذه المشكلة لها حلول متعددة، نستطيع التعرف على هذه الحالة عند الوصول إلى جدول الحل الأمثل، حيث تكون معاملات دالة الهدف مساوية للصفر لمتغير أو أكثر من المتغيرات غير الداخلة في قاعدة الحل (متغيرات غير أساسية)، في هذه الحالة يمكن أن تتحول هذه المتغيرات إلى متغيرات أساسية، تكون جدولا جديدا يعطي نفس الحل الأمثل.

4-انحلال الحل (حياد أحد القيود)Degeneracy :

تظهر حالة الانحلال في حل مشكلة البرمجة الخطية عندما يكون واحد أو أكثر من متغيرات الحل الأساسي قيمته صفر، قد تظهر حالة الانحلال في أحد مراحل الحل، وإما تستمر لنهاية الحل أو تختفي قبل الوصول إلى الحل الأمثل، وعند استمرار حالة الانحلال إلى نهاية الحل لن تتحسن قيمة دالة الهدف.

يمكن الاستدلال على حالة الانحلال في طريقة السمبلكس عندما تتساوى النسبة الموجبة الدنيا التي نحدد من خلالها المتغير الذي سيغادر قاعدة الحل، أو إذا تساوت القيم في سطر دالة الهدف التي على أساسها يتم اختيار المتغير الذي يدخل إلى قاعدة الحل.

تمارين مقترحة:

التمرين1:

إليك النموذج الخطي التالي:

$$\text{Max } (Z) = 8x_1+6x_2$$

Subject to constraints

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2 \leq 60 \\ 2x_1+4x_2 \leq 48 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2) \geq 0$$

المطلوب: - أرسم القيود وحدد منطقة الحلول الممكنة؛

- أوجد الحل الأمثل وحدد قيمة دالة الهدف.

التمرين2:

إليك النموذج الخطي التالي:

$$\text{Min } (C) = 5x_1+2x_2$$

Subject to constraints

$$\begin{cases} x_1+x_2 \leq 10 \\ x_1 = 5 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2) \geq 0$$

المطلوب:

- أوجد الحل بالطريقة البيانية.

التمرين3:

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Min } (C) = 3x_1+3x_2$$

Subject to constraints

$$\begin{cases} x_1+x_2 \geq 9 \\ x_1- x_2 \leq 9 \\ x_1+3x_2 \geq 17 \\ x_1 \geq 3 \\ x_2 \leq 10 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2) \geq 0$$

المطلوب:

- أوجد الحل بالطريقة البيانية.

التمرين 4:

أكتب الصيغة النموذجية والشكل المصفوفي للبرامج التالية:

$$\text{Max } Z = 8x_1+6x_2$$

Subject to constraints

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2 \le 60 \\ 2x_1+4x_2 \le 48 \end{cases}$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

$$\text{Max } Z = 5x_1+2x_2 +x_3$$

Subject to constraints

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+ x_3 \ge 20 \\ 6x_1+7x_2+ 5x_3 \le 30 \\ 7x_1+x_2+ 3x_3 = 40 \end{cases}$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

التمرين 5:

حل بطريقة السامبلكس البرامج التالية:

$$\text{Max } Z = 5x_1+3x_2 +4x_3$$

Subject to constraints

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+ 4x_3 \le 80 \\ 2x_1+2x_2+ 3x_3 \le 50 \\ x_1+3x_2+ 2x_3 \le 40 \\ (x_1, x_2, x_3) \ge 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 100x_1+60x_2$$

Subject to constraints

$$\begin{cases} 8x_1+2x_2 \le 40 \\ 6x_1+9x_2 \le 108 \\ 8x_1+6x_2 \le 96 \\ (x_1, x_2) \ge 0 \end{cases}$$

التمرين6:

أكتب النموذج الرياضي بالشكل القياسي باستخدام المتغيرات الاصطناعية:

1) $\text{Min}(c) = 4x_1+5x_2$

Subject to constraints

$$\begin{cases} 3x_1+x_2 = 3 \\ 4x_1+3x_2 \ge 6 \\ x_1+2x_2\le 4 \end{cases}$$
$$(x_1, x_2) \ge 0$$

2) $\text{Min } (c) = 5x_1+12x_2+4x_3$

Subject to constraints

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 \le 5 \\ 2x_1-x_2+3x_3= 2 \\ x_2= 3 \end{cases}$$
$$(x_1, x_2, x_3) \ge 0$$

التمرين 7:

باستخدام طريقة السامبلكس أوجد الحل الأمثل للبرامج التالية:

1) $\text{Min } Z = 2x_1+x_2$

Subject to constraints

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \geq 30 \\ 4x_1+2x_2 \geq 40 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2) \geq 0$$

2) $\text{Min } Z = x_1+3x_2$

Subject to constraints

$$\begin{cases} x_1+x_2 \geq 4 \\ 2x_1+x_2 \leq 6 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2) \geq 0$$

3) $\text{Min } Z = 16x_1+12x_2$

Subject to constraints

$$\begin{cases} x_1+2x_2 = 22 \\ 3x_1+2x_2 \geq 30 \\ 2x_1+3x_2 \leq 45 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2) \geq 0$$

المحور الثالث: الثنائية وتحليل الحساسية

I–البرنامج الثنائي (النظير أو المعاكس) – duality –

تمهيد

خطوات تشكيل النموذج الثنائي

كيفية تحويل النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل (ثنائي)

كيفية استنتاج الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من خلال الحل الأمثل للبرنامج الأصلي

طرق حل المسألة الثنوية

II–التحليل الحسي

تمهيد

تحليل الحساسية

حالة تغير معاملات متغيرات دالة الهدف– الحدود الدنيا والقصوى لدالة الهدف–

حالة تغير الطرف الأيمن للقيود الوظيفية (المتاح) b_j

مثال تطبيقي

البرنامج الثنائي (النظير أو المعاكس) – duality –

تمهيد:

إن المشاكل التي تم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية أطلق عليها اصطلاح النماذج الأولية **primal model** ، ومن الممكن إعادة صياغة النموذج الأولي بأسلوب أخر يطلق عليه اصطلاح النموذج المقابل(الثنائي) **Dual Model** ، أي أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل له ومشتق منه.

إذن هي عبارة عن نموذج معكوس للنموذج الأصلي نلجأ إليه عندما يصعب حل المسألة الأصلية، أو أن للبرنامج الأولي عدة حلول، فكل نموذج أصلي له نموذج ثنائي أي أن كل مشكلة تعظيم الأرباح يمكن صياغتها كمشكلة تدنية التكاليف كما أن مشكلة تدنية التكاليف يمكن صياغتها كمشكلة تعظيم الأرباح، وأن هناك صفة مشتركة ما بين النموذجين تتمثل في أن الحل الأمثل لأحدهما يعطي الحل الأمثل للنموذج الأخر.

1- خطوات تشكيل النموذج الثنائي:

يمكن تلخيص خطوات تحويل النموذج الأصلي إلى نموذج ثنائي بالشكل التالي:

- عندما يكون النموذج الأصلي يعبر عن مشكلة الوصول إلى أقصى قيمة(التعظيم) Max فإنه يتحول إلى الوصول إلى أدنى قيمة Min عند إعداد النموذج الثنائي، والعكس صحيح، بمعنى:

تحويل شكل دالة الهدف إذا كانت Max في المسألة الأصلية تصبح Min في المسألة الثنائية والعكس إذا كانت Min في المسألة الأصلية تصبح Max في المسألة الثنائية.

- معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة الثنائية هي قيم الطرف الأيمن (b_i) في المسألة الثنائية.
- مصفوفة معاملات المتغيرات في القيود للمسألة الثنائية هي منقول مصفوفة المتغيرات في المسألة الأصلية.
- الطرف الأيمن للمسألة الثنائية هي معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة الأصلية.
- متغيرة من الشكل ($\leq$) في المسألة الأصلية تعني قيد من الشكل ($\geq$) في المسألة الثنائية.
- متغيرة من الشكل ($\geq$) في المسألة الأصلية تعني قيد من الشكل ($\leq$) في المسألة الثنائية.
- متغيرة كيفي في المسألة الأصلية تعني قيد من الشكل (=) في المسألة الثنائية.
- قيد من الشكل ($\leq$) في المسألة الأصلية يعني قيد من الشكل ($\geq$) في المسألة الثنائية.
- قيد من الشكل ($\geq$) في المسألة الأصلية يعني قيد من الشكل ($\leq$) في المسألة الثنائية.
- قيد من الشكل (=) في المسألة الأصلية يعني متغير كيفي في المسألة الثنائية.

يمكن تلخيص الخطوات السابقة في الجدول الموالي:

المسألة الأصلية	المسألة الثنوية
دالة الهدف Max(z)	**دالة الهدف Min(w)**
دالة الهدف Min(z) تحول إلى Max(-z)	**دالة الهدف Min(-w)**
عدد القيود يساوي	عدد المتغيرات (y_i)
عدد المتغيرات (x_j) يساوي	عدد القيود
القيد على شكل أقل أو يساوي (≤)	$\mathbf{Y_i \geq 0}$
القيد أكبر أو يساوي (≥) يضرب في (-1)، أي يصبح أقل أو يساوي	$\mathbf{Y_i \geq 0}$
القيد على شكل مساواة (=)	$\mathbf{Y_i \neq 0}$
$Xj \leq 0$	القيد أقل أو يساوي (≤)
$Xj \geq 0$	القيد أكبر أو يساوي (≥)
$Xj = 0$	القيد يساوي (=)

ونظرا لشرط اللاسلبية في المسألة الأصلية، فإن كل القيود في الثنوية تكون على شكل أكبر أو يساوي.

ملاحظة :

لا بد من مراعاة بعض الجوانب عند تحويل النموذج الأولي إلى مقابل أو العكس، فإذا كانت المشكلة تهدف إلى تعظيم الربح فيجب أن تكون جميع المتراجحات باتجاه واحد وهو أصغر أو يسا وي، بينما تكون المتراجحات في شكل أكبر أو يساوي في حالة كون المشكلة تهدف إلى تقليل التكاليف، أما إذا وجدت بعض المتراجحات مخالفة لما ذكر أعلاه، فلا بد من تحويلها إلى الاتجاه المطلوب وذلك بضربها في (-1).

2- كيفية تحويل النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل (ثنائي):

إذا كان البرنامج الأولي في صيغته القانونية التالية:

$$\mathbf{Max(Z)} = \sum_{j=1}^{n} C_j\, x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i \;\leq\; b_i \;\; ; i = 1, 2, \dots \dots \dots, m$$

$$x_i \geq 0 \;\; , b_i \geq 0$$

فإن برنامجه الثنائي يكون كالتالي:

$$\textbf{Min}(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i \ \geq \ c_j \quad ; j = 1, 2, \dots\dots\dots, n$$

$$y_i \geq 0 \ , c_j \geq 0$$

نلاحظ أن عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي يساوي عدد القيود في البرنامج الأولي، وعدد القيود في البرنامج الثنائي يساوي عدد المتغيرات في البرنامج الأولي.

مثال توضيحي:

تنتج إحدى الشركات الوطنية نوعين من المنتجات هي X_1 و X_2 باستخدام ثلاثة عناصر إنتاجية هي المواد الأولية والطاقة والعمل، ويوضح الجدول الآتي المتاح من هذه الموارد، ما تحتاجه الوحدة الواحدة من كل X_1 و X_2 من هذه الموارد وربح كل منها.

المنتج / عناصر الإنتاج	المنتجات		الموارد المتاحة
	X_1	X_2	
مواد أولية	2	4	16
طاقة	6	2	20
عمل	8	6	24
ربح الوحدة الواحدة	4	6	

المطلوب:

1– إيجاد البرنامج الخطي لهذه المسألة.

2– إيجاد البرنامج الثنائي وتفسيره اقتصاديا.

الحل:

البرنامج الأولي يعطى بالشكل التالي:

$$\mathbf{Max(z)= 4\ x_1 + 6\ x_2}$$ **هدف المؤسسة**

تحديد القيود:

القيود المفروضة على تحقيق الهدف وبذلك فإن قيود هذه المسألة تكون كما يلي:

قيد المواد الأولية: $2x_1 + 4x_2 \leq 16$

قيد الطاقة: $6x_1 + 2x_2 \leq 20$

قيد العمل: $8x_1 + 6x_2 \leq 24$

قيد عدم السلبية : $X_2 \geq 0 \;,\; X_1 \geq 0$

$$S/C \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 24 \end{cases}$$

حل النموذج الأولي يعطينا قيمX_1 و X_2 وقيم Z المثلى التي تجعل قيمة الربح أكبر ما يمكن بالإضافة إلى الوحدات غير المستغلة من المواد الأولية، لكنه لا يحدد كلفة الوحدة الواحدة من X_1 و X_2 والكلفة الكلية للإنتاج لذلك يتم استخراج البرنامج الثنائي.

استخراج البرنامج الثنائي يكون بالشكل التالي:

- معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة الثنائية هي قيم الطرف الأيمن (b_i) في المسألة الثنائية.

$$B_i \quad \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Min(w) = 16\,Y_1 + 20\,Y_2 + 24\,Y_3}$$

- مصفوفة معاملات المتغيرات في القيود للمسألة الثنائية هي منقول مصفوفة المتغيرات في المسألة الأصلية.
- الطرف الأيمن للمسألة الثنائية هي معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة الأصلية.

$$\mathbf{S/C} \begin{cases} \mathbf{2\,Y_1 + 6\,Y_2 + 8\,Y_3 \geq 4} \\ \mathbf{4\,Y_1 + 2\,Y_2 + 6\,Y_3 \geq 6} \\ \mathbf{(Y_1, Y_2, Y_3) \geq 0} \end{cases}$$

حيث:

Y_1 : سعر الوحدة الواحدة من المواد الأولية.

Y_2 : سعر الوحدة الواحدة من الطاقة.

Y_3 : سعر الوحدة الواحدة من العمل.

يمكن تفسير معاملات دالة الهدف كما يلي:

$16\,Y_1$: كلفة المواد الأولية(أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من المواد الأولية في كمية المواد الأولية المتوفرة).

$20\,Y_2$: كلفة الطاقة(أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من الطاقة في كمية المواد الطاقة المتوفرة).

$24\,Y_3$: كلفة العمل(أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من العمل في كمية المواد العمالة المتوفرة).

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية، ولهذا نسعى إلى تحقيق أقل كلفة للعملية الإنتاجية دالة الهدف للنموذج المقابل من نوع التدنئة، مع تحقيق الأرباح التي حددت وفق النموذج الأولي.

أما التفسير الاقتصادي لقيود النموذج الثنائي:

القيد الأول:

$2\,Y_1$: تمثل كلفة المواد الأولية اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج X_1 .

$6\,Y_2$: تمثل كلفة الطاقة اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج X_1 .

$8\,Y_3$: تمثل كلفة العمل اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج X_1 .

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية اللازمة لتصنيع وحدة واحدة من المنتوج X_1 ، إذن القيد الأول هو كلفة إنتاج وحدة واحدة من X_1 ، حيث أن الكلفة الكلية لتصنيع وحدة واحدة من X_1 يجب أن تساوي أو بالحد الأدنى لربح الوحدة الواحدة من المنتوج X_1 ومقداره 4.

القيد الثاني:

$4\,Y_1$: تمثل كلفة المواد الأولية اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج X_2 .

$2\,Y_2$: تمثل كلفة الطاقة اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج X_2 .

$6\,Y_3$: تمثل كلفة العمل اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج X_2 .

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية اللازمة لتصنيع وحدة واحدة من المنتوج X_2 ، إذن القيد الثاني هو كلفة إنتاج وحدة واحدة من X_2 ، حيث أن الكلفة الكلية لتصنيع وحدة واحدة من X_2 يجب أن تساوي أو بالحد الأدنى لربح الوحدة الواحدة من المنتوج X_2 ومقداره 6.

ملاحظة:

إذا كان النموذج ذا صيغة مختلطة(عامة) أي يحتوي على متراجحات من النوعين ($\geq$ ، $\leq$)، فإنه يجب تحويله إلى الصيغة القانونية ثم تحويله إلى برنامج ثنائي.

المعنى الاقتصادي لمتغيرات المسألة الثنوية:

– تكلفة الفرصة البديلة t_j تسمى أيضا بالتكلفة المخفضة وهي القيمة اللازمة لتحسين (بالزيادة أو النقصان) معامل المتغير في دالة الهدف حتى يمكن للمتغير أخذ قيمة أكبر من الصفر في الحل الأمثل.

- سعر الظل y_i يقصد به مقدار التغير (زيادة أو نقصان) في قيمة دالة الهدف نتيجة تغير الطرف الأيمن من القيود بوحدة واحدة. شريطة أن لا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل وأن لا تتغير عناصر المسألة الأخرى.

مثال2:

ليكن نموذج البرمجة الخطية الأولي التالي:

$$\mathbf{Max(z)= x_1 +2\, x_2}$$

$$S/C \quad \begin{cases} 3\,x_1 +4\,x_2 \leq 20 \\ 5\,x_1 +6\,x_2 \geq 30 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases}$$

$$X_2 \geq 0 \ , \ X_1 \geq 0$$

نموذج البرنامج ذو صيغة عامة يتم تحويله إلى صيغة قانونية أي في حالة Max يجب أن تكون كل قيوده من النوع أقل أو تساوي ومنه نضرب طرفي المتراجحة أكبر أو تساوي في إشارة ناقص(-1) يصبح القيد أقل أو يساوي كما يلي:

$5\,x_1 +6\,x_2 \geq 30$ نضرب في (-) تصبح:

$$-(5\,x_1 +6\,x_2) \leq -30$$

$$-5\,x_1 - 6\,x_2 \leq -30$$

ومنه يصبح النموذج الأصلي:

$$\mathbf{Max(z)= x_1 +2\, x_2}$$

$$S/C \quad \begin{cases} 3\,x_1 +4\,x_2 \leq 20 \\ -5\,x_1 - 6\,x_2 \leq -30 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases}$$

$$X_2 \geq 0 \ , \ X_1 \geq 0$$

ومنه يكون النموذج الثنائي:

$$\mathbf{Min(w)=20\, y_1 -30\, y_2 +10 y_3}$$

$$S/C \quad \begin{cases} 3\,y_1 -5\,y_2 + y_3 \geq 1 \\ 4\,y_1 -6 y_2 + y_3 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_3 \geq 0 \ , \ y_2 \geq 0 \ , \ y_1 \geq 0$$

3- كيفية استنتاج الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من خلال الحل الأمثل للبرنامج الأصلي:

يتم استنتاج الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من خلال الحل الأمثل للبرنامج الأصلي باتباع الخطوات التالية:

- أولا قيم Δ c تصبح في مكان bj والعكس صحيح.
- ثانيا تحديد نوع المتغيرات وفقا للقاعدة.
- ثالثا قيمة z نفسها.
- رابعا أسطر المصفوفة تصبح أعمدة والعكس صحيح مع العكس في الإشارة (+ يصبح – و – يصبح +).
- ثم تكملة بقية بيانات الجدول (C_k ...)

ملاحظة: فقط إذا كان النموذج الثنائي من النوع Min نضيف لسطر التقييم إشارة (–).

مثال:

البرنامج الأصلي

$$Max(z)= x_1 +3\, x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 +4\, x_2 \leq 90 \end{cases}$$

$$X \geq 0 \ , \ X_1 \geq 0$$

البرنامج الثنائي له

$$Min(z)=40\, y_1 +90\, y_2$$

$$S/C \begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 +4\, y_2 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0 \ , \ y_2 \geq 0$$

$$Max(z)= x_1 +3\, x_2+0s_1+0s_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2+0s_1 = 40 \\ x_1 +4\, x_2+0s_2 = 90 \end{cases}$$

$$X_2 \ , \ X_1, s_1, s_2 \geq 0$$

الجدول الأول:

CJ	V	Q	1	3	0	0
			X1	**X2**	**S2**	**S2**
0	**S1**	40	2	1	1	0
0	**S2**	90	1	4	0	1
			0	0	0	0
Z = 0			1	3	0	0

الجدول الثاني:

CJ	V	Q	1	3	0	0
			X1	X2	S2	S2
0	**S1**	70/4	7/4	0	1	–1/4
3	**X2**	90/4	1/4	1	0	1/4
			3/4	3	0	3/4
Z = 270/4			1/4	0	0	–3/4

الجدول الثالث:

CJ	V	Q	1	3	0	0
			X1	X2	S2	S2
1	**X1**	**10**	1	0	4/7	–1/7
3	**X2**	**20**	0	1	–1/7	2/7
			1	3	1/7	5/7
Z = 70			**0**	**0**	**–1/7**	**–5/7**

الجدول في الأخير:

			X_1	X_2	S_1	S_2
1	X_1	**10**	1	0	4/7	–1/7
3	X_2	**20**	0	1	–1/7	2/7
Z=70			**0**	**0**	**–1/7**	**–5/7**

البرنامج الثنائي:

$$Min(z)=40\, y_1 + 90\, y_2 + 0s_1 + 0s_2 + MA_1 + MA_2$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 - s_1 + A_1 = 1 \\ y_1 + 4\, y_2 - s_2 + A_2 = 3 \end{cases}$$

$$y_1\ ,\ y_2\ , S_1, S_2, A_1, A_2 \quad \geq 0$$

نستنتج الحل الأمثل (الجدول الأخير) للبرنامج الثنائي كما يلي:

			X_1	X_2	A_1	A_2
1	X_1	**10**	1	0	4/7	-1/7
3	X_2	**20**	0	1	-1/7	2/7
Z=70			**0**	**0**	**1/7**	**5/7**

الجدول الأخير للبرنامج الثنائي:

			y_1	y_2	A_1	A_2
40	y_1	**1/7**	1	0	-4/7	1/7
90	y_2	**5/7**	0	1	1/7	-2/7
Z=70			**0**	**0**	**-10**	**-20**

المعنى الاقتصادي لمتغيرات المسألة الثنوية:

- تكلفة الفرصة البديلة t_j تسمى أيضا بالتكلفة المخفضة وهي القيمة اللازمة لتحسين (بالزيادة أو النقصان) معامل المتغير في دالة الهدف حتى يمكن للمتغير أخذ قيمة أكبر من الصفر في الحل الأمثل.
- سعر الظل y_i يقصد به مقدار التغير (زيادة أو نقصان) في قيمة دالة الهدف نتيجة تغير الطرف الأيمن من القيود بوحدة واحدة. شريطة أن لا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل وأن لا تتغير عناصر المسألة الأخرى.

ملاحظة:

حتى نتجنب الأخطاء المحتملة عند صياغة المسألة الثنوية نقترح القيام بما يلي:

- إذا كانت دالة الهدف في المسألة الأصلية على شكل Min Z نقوم بتحويلها إلى Max(-z) بضرب معاملاتها في (-1).
- تحويل القيود التي هي على شكل أكبر أو تساوي ($\geq$) إن وجدت في المسألة الأصلية إلى ($\leq$) أصغر أو تساوي بضرب طرفي القيود في (-1).
- أما القيود التي هي في شكل معادلات فلا تحول. وبما أن القيد في الأصلية يقابله تغير في الثنوية فننتظر أن تكون المتغيرات بهذه القيود غير مقيدة الإشارة.[1]

[1] حمودي حاج صحراوي، مرجع سابق، ص ص 61-62

مثال:

المطلوب إيجاد المسألة الثنوية للمسألة الأصلية الأتية:

$$\mathbf{Min(z)= 4x_1 +5\ x_2 + 3x_3}$$

$$S/C \begin{cases} 2\ x_1 +3\ x_2 +4x_3 \leq 2500 \\ x_1 + x_2 +x_3 \geq 750 \\ x_1 \geq 250 \\ x_2 = 300 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{x_3 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \ , \ x_1 \geq 0}$$

الحل:

- تحول دالة الهدف إلى Max بضرب الدالة z في (-1).
- تحول القيود التي هي على شكل أكبر أو تساوى ($\geq$) في المسألة الأصلية إلى ($\leq$) أصغر أو تساوي بضرب طرفي القيود في (-1).

$$\mathbf{Min(z) = Max(-z)= -4x_1 -5\ x_2 - 3x_3}$$

$$S/C \begin{cases} 2\ x_1 +3\ x_2 +4x_3 \leq 2500 \\ - x_1 - x_2 -x_3 \leq -750 \\ - x_1 \leq -250 \\ x_2 = 300 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{x_3 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \ , \ x_1 \geq 0}$$

المسألة الثنوية المرافقة:

$$\mathbf{Min(w) = 2500y_1 -750\ y_2 - 250y_3 +300y_4}$$

$$S/C \begin{cases} 2\ y_1 - y_2 -y_3 +0y_4 \geq -4 \\ 3\ y_1 - y_2 +0y_3 +y_4 \geq -5 \\ 4\ y_1 -y_2 +0y_3 +0y_4 \geq -3 \end{cases}$$

$$\mathbf{y_3 \geq 0 \quad y_2 \geq 0 \ , \ y_1 \geq 0 \quad y_4 \neq 0}$$

(المتغير y_4 كيفي غير مقيد الإشارة)

4- طرق حل المسألة الثنوية:

هناك عدة طرق لحل المسألة الثنوية، منها طريقة تعتمد أساسا على الحل الأمثل للمسألة الأصلية ويطلق عليها طريقة قانون التكامل بين متغيرات الأصلية ومتغيرات الثنوية، وطريقة السمبلكس الخاصة بالمسألة الثنوية وطريقة ثالثة تتمثل في استنتاج الحل الأمثل من الجدول الأمثل للأصلية، طريقة رابعة تتمثل في اعتبار المسألة الثنوية كأية مسألة أصلية وحلها بطريقة السمبلكس على مرحلتين أو إدخال المتغيرات الوهمية. سوف نكتفي بتوضيح ثلاث طرق على النحو التالي:

1-4. طريقة قانون التكامل بين متغيرات الأصلية ومتغيرات الثنوية:

نبين ذلك فيما يلي:

المسألة الأصلية		المسألة الثنوية
$Max(z) = \Sigma c_j.x_j$ $\Sigma\, a_{ij} \,.\, x_j \leq b_i$ $\Sigma\, a_{ij} \,.\, x_j + S_i \;= b_i \;\; (*)$	$\Leftrightarrow$	$Min(w) = \Sigma b_i.y_i$ $\Sigma\, a_{ji} \,.\, y_i \geq b_i$ $\Sigma\, a_{ji} \,.\, y_i - t_i \;= c_j \;\; (**)$

$$\Sigma t_j\, xj = 0 \;\;\Rightarrow\;\; x_j = 0 \;\; t_j > 0$$

$$X_j > 0 \;\;\Rightarrow\;\; t_j = 0$$

مثال:

لتكن المسألة الأصلية الأتية:

$$Max(z) = 5x_1 + 2\, x_2 \; + 4x_3$$

$$S/C \begin{cases} x_1 + 2\, x_2 \;\; + x_3 \;\; \leq \;\; 10 \\ 2x_1 - \; x_2 \;\; + 3x_3 \;\; \leq 8 \end{cases}$$

$$(\, x_1,\, x_2\, ,\, x_3\,) \geq 0$$

والحل الأمثل للأصلية هو:

$$x_1 = 26/5 \qquad x_2 = 12/5 \qquad x_3 = 0 \qquad s_1 = 0 \qquad s_2 = 0 \qquad z = 154/5$$

المطلوب:

- إيجاد الحل للمسألة الثنوية بطريقة قانون التكامل بين متغيرات الأصلية ومتغيرات الثنوية؟

الحل:

1 – صياغة المسألة الثنوية:

$$Min(w) = 10y_1 + 8\, y_2$$

$$S/C \begin{cases} y_1 + 2\, y_2 \;\; \geq \;\; 5 \\ 2\, y_1 - y_2 \;\; \geq \; 2 \\ y_1 + 3y_2 \;\; \geq \; 4 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0 \qquad y_2 \;\; \geq 0$$

2– تحويل على الصياغة القياسية(المعيارية):

$$S/C \begin{cases} y_1 + 2\, y_2 - t_1 \;\; = \;\; 5 \\ 2\, y_1 - y_2 - t_2 \;\; = \; 2 \\ y_1 + 3y_2 - t_3 \;\; = \; 4 \end{cases}$$

$$(y_1\, ,\, y_2\, ,\, t_1\, ,\, t_2\, ,\, t_3\,) \geq 0$$

لدينا المعطيات التالية:

$x_1=26/5 \quad x_2= 12/5 \quad x_3 =0 \quad s_1 = 0 \quad s_2= 0 \quad z= 154/5$

ومنه:

$x_1=26/5 \Rightarrow t_1 =0 \quad x_2= 12/5 \Rightarrow t_2 =0 \quad x_3 =0 \Rightarrow t_1 >0$

$s_1 = 0 \Rightarrow y_1 > 0 \quad s_2= 0 \Rightarrow y_2 >0 \quad \mathbf{z= 154/5} \quad \mathbf{w= 154/5}$

بالتعويض في القيود نتحصل على مجموعة من المعادلات الآتية:

$y_1 +2 y_2 - t_1 = 5.........(1)$

$2 y_1 - y_2 - t_2 = 2.........(2)$

$\mathbf{y_1 +3y_2 - t_3 = 4} ....(3)$

$y_1 +2 y_2 \cancel{- t_1} = 5.........(1)$

$2 y_1 - y_2 \cancel{- t_2} = 2.........(2)$

$\mathbf{y_1 +3y_2 - t_3 = 4} ....(3)$

من المعادلة (1) و (2) نتحصل على: $y_2 = 8/5 \quad y_1= 9/5$

بالتعويض في (3) نتحصل على قيمة t_3 $\quad t_3= 13/5$

وحتى نتحقق من النتائج نعوض كل من قيم y_1 و y_2 بـ $9/8$ و $8/5$ على التوالي فنتحصل على:

$$W= 10 \ y_1 + 8 \ y_2$$

$$W= 10(9/5) + 8(8/5) = 90/5 + 64/5 = 154/5$$

وبما أن z=w فإن الحل المتحصل عليه بالنسبة للمسألة الثنوية هو الحل الأمثل فعلا.

هذه الطريقة بسيطة وسريعة في نفس الوقت إلا أنها لا تخلو من بعض العيوب نذكر منها:

- إعتمادها كلية على الحل الأمثل للمسألة الأصلية، هذه الطريقة تتطلب حل المسألة الأصلية أولا وهذا ما يأخذ وقتا طويلا في بعض الأحيان.
- هذه الطريقة لا يمكن استعمالها كما هي إذا كانت المسألة الأصلية تتميز بحالة التحلل أو بحالة الحلول المثلى البديلة.[1]

2-4 طريقة استنتاج الحل الأمثل من الجدول الأمثل للأصلية:

ليكن نموذج البرمجة الخطية الأولي التالي:

$$\mathbf{Max(z)= 40x_1 +60 x_2 -20 x_3}$$

$$s/c \quad \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 300 \\ 4 x_1 + 2 x_2+x_3 \leq 220 \\ x_1 +x_3 \leq 100 \end{cases}$$

[1] حمودي حاج صحراوي، مرجع سبق ذكره، ص 66.

$(x_1, x_2, x_3) \geq 0$

وجدول الحل الأمثل للنموذج أعلاه هو التالي:

الجدول رقم(1):

c_j	م.أ B.V	b_i	**40** x_1	**60** x_2	**-20** x_3	**0** s_1	**0** s_2	**0** s_3
60	x_2	**30**	0	1	-1/6	2/9	-1/6	0
40	x_1	**40**	1	0	1/3	-1/9	1/3	0
0	s_2	**70**	0	0	7/6	-2/9	1/6	1
Z=3400			40	60	10/3	80/9	10/3	0
$\Delta Z = c_j - z_i$			**0**	**0**	**-50/3**	**-80/9**	**-10/3**	**0**

- استنتاج الحل الأمثل من الجدول الأمثل للأصلية:

الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأولي أعلاه هو التالي:

- متغيرات القرار: بما أن النموذج الأولي على شكله النموذجي فإن:

y_i هي z_i لمتغيرة الفجوة s_i ، و $y_1=80/9 \quad , y_2=10/3 \quad , y_3=0$

- متغيرات الفجوة: بما أن النموذج من الشكل (Max) فإن: $t_i = -(c_j - z_j)$

$t_1 = 0 \;,\; t_2 = 0 \;,\; t_3 = 50/3$

أما في حالة النموذج من الشكل(Min)فإن:

$t_i = (c_j - z_j)$

4-3 طريقة اعتبار المسألة الثنوية كأية مسألة أصلية وحلها بطريقة السمبلكس:

-طريقة خوارزمية الثنائية للسمبلكس:

أ- تحديد المتغيرة الخارجة أولا أي سطر الارتكاز والتي توافق أقل معامل سالب bi ؛

ب- بعد تحديد المتغيرة الخارجة يتم تحديد المتغيرة الداخلة أي عمود الارتكاز والتي توافق أقل معامل سالب في سطر الارتكاز؛

ت- تم عنصر الارتكاز؛

ومن ثم تحسين الحل بطريقة السمبلكس العادية إلى أن نصل إلى شرط عدم سلبية المتغيرات ومعيار الأمثلية.

مثال:

لتكن المسألة الأصلية الأتية:

$$\text{Max}(z)= x_1 + 3x_2$$

$$S/C \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 + 4x_2 \leq 90 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2) \geq 0$$

البرنامج الثنائي المقابل:

$$\text{Min}(w)=40y_1 + 90y_2$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 + 4y_2 \geq 3 \end{cases}$$

$$(y_1, y_2) \geq 0$$

الصيغة القياسية:

$$\mathbf{Max(z)= x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2}$$

$$S/C \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + s_1 = 40 \\ x_1 + 4x_2 + s_2 = 90 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, s_1, s_2) \geq 0$$

الجدول رقم(1):

c_j	م.أ B.V	b_i	1	3	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
0	s_1	40	2	1	1	0
0	s_2	90	1	4	0	1
Z=0			0	0	0	0
$\Delta Z= c_j - z_i$			1	3	0	0

S_2 خارج

X_2 داخل

الجدول رقم(2):

c_j	م.أ B.V	b_i	1	3	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
0	s_1	70/4	7/4	0	1	-1/4
3	x_2	90/4	1/4	1	0	¼
Z=270/4			3/4	3	0	¾
$\Delta Z = c_j - z_i$			1/4	0	0	-3/4

S_1 خارج

X_1 داخل

الجدول رقم(3):

c_j	م.أ B.V	b_i	1	3	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2
1	x_1	10	1	0	4/7	-1/7
3	x_2	20	0	1	-1/7	2/7
Z=70			1	3	1/7	5/7
$\Delta Z = c_j - z_i$			0	0	-1/7	-5/7

الحل الأمثل للمسألة الثنوية:

البرنامج الثنائي المقابل: $Min(w) = 40\,y_1 + 90\,y_2$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 + 4\,y_2 \geq 3 \end{cases}$$
$$(y_1, y_2) \geq 0$$

الصيغة القياسية:

$$Min(w) = 40\,y_1 + 90\,y_2 + 0t_1 + 0t_2$$

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + t_1 = -1 \\ -y_1 - 4\,y_2 + t_2 = -3 \end{cases}$$
$$(y_1, y_2, t_1, t_2) \geq 0$$

الجدول الأولي:

معاملات دالة هدف	م.أ B.V	الطرف الأيمن	40 y_1	90 y_2	0 t_1	0 t_2
0	t_1	**−1**	-2	−1	1	0
0	t_2	**−3**	−1	−4	0	1
w=70			0	0	0	0
$\Delta w= c_j-w_i$			**40**	**90**	**0**	**0**

الطرف الأيمن قيم سالبة

قيم موجبة

السطر الأخير قيم موجبة ويحقق الحل الأمثل في حالة دالة هدف Min ، ولكن قيم الطرف الأيمن سالبة وعليه شرط التوقف البحث عن الحل الأمثل أن قيم الطرف الأيمن تكون بدورها موجبة.

– نبدأ بالمتغير الخارج ومن بعد ذلك لمتغير الداخل (عكس ما كان معمول به في السابق).

– كيفية اختيار المتغير الخارج: يحمل أكبر قيمة سالبة في الطرف الأيمن.

–كيفية اختيار المتغير الداخل: نقسم المعاملات السالبة فقط على المتغيرات الخارجة المقابلة لها، ونأخذ المطلق وتأخذ أقل نسبة.

الجدول(**1**):

معاملات دالة هدف	م.أ B.V	الطرف الأيمن	40 y_1	90 y_2	0 t_1	0 t_2
0	t_1	**-1**	-2	-1	1	0
0	t_2	**-3**	-1	-4	0	1
w=70			0	0	0	0
$\Delta w= c_j-w_i$			**40**	**90**	**0**	**0**

الطرف الأيمن أكبر قيمة سالبة

t_2 خارج

y_2 داخل

– أولا المتغير الخارج: (للطرف الأيمن): أكبر قيمة سالبة وهي 3–وعليه المتغير الخارج هو t_2.

–ثانيا المتغير الداخل: تمثل أصغر نسبة بالقيمة المطلقة من ناتج قسمة المعاملات السالبة فقط على المتغيرات الخارجة

$$40/-1=-40 \qquad 90/-4=-22.5$$

نأخذ أصغر قيمة بالقيمة المطلقة وعليه المتغير الداخل هو y_2 وباقي العملية نفس طريقة سمبلكس لدالة هدف أصلية.

الجدول(2):

معاملات دالة هدف	م.أ B.V	الطرف الأيمن	40 y_1	90 y_2	0 t_1	0 t_2
0	**t_1**	**-1/4**	-7/4	0	1	-1/4
90	**y_2**	**3/4**	1/4	1	0	-1/4
w=270/4			90/4	90	0	-90/4
$\Delta w= c_j-w_i$			**70/4**	**0**	**0**	**90/4**

t_1 خارج

Y_1 داخل

– المتغير الخارج: (للطرف الأيمن): أكبر قيمة سالبة وهي 1/4–وعليه المتغير الخارج هو t_1.

–ثانيا المتغير الداخل: تمثل أصغر نسبة بالقيمة المطلقة من ناتج قسمة المعاملات السالبة فقط على المتغيرات الخارجة

$$70/40 \div (-7/4) =-10 \qquad 90/4 \div (-1/4)= -90$$

أصغر نسبة بالقيمة المطلقة هي للمتغير الداخل y_1 وعلى المتغير الخارج t_1 والمتغير الداخل y_1.

الجدول(3):

معاملات دالة هدف	م.أ B.V	الطرف الأيمن	40 y_1	90 y_2	0 t_1	0 t_2
40	y_1	**1/7**	1	0	-4/7	1/7
90	y_2	**5/7**	0	1	1/7	-2/7
w=490/4= 70			40	90	-10	-20
$\Delta w= c_j-w_i$			**0**	**0**	**+10**	**+20**

شرط التوقف:

عندما تكون قيم الطرف الأيمن جميع القيم موجبة. $y_2= 5/7$ $y_1= 1/7$ $W=z= 70$

c_j	م.أ B.V	b_i	1 x_1	3 x_2	0 s_1	0 s_2
1	x_1	**10**	1	0	4/7	-1/7
3	x_2	**20**	0	1	-1/7	2/7
Z=70			1	3	1/7	5/7
$\Delta Z= c_j-z_i$			**0**	**0**	**-1/7**	**-5/7**

II–التحليل الحسي

تمهيد:

إن الحل العلمي لأي مشكلة لا يكون حلا كاملا بمجرد الوصول إلى الحل الأمثل، إن أي تغير في قيم الثوابت النموذج أو ما يعرف بمدخلات النموذج الذي سيغير من مشكلة البرمجة الخطية وسيؤثر على الحل الأمثل وعليه نحن بحاجة إلى أسلوب يساعدنا في الوقوف على أثر تغير هذه الثوابت على الحل الأمثل الذي تم الوصول إليه.

1–تحليل الحساسية:

يسعى متخذ القرار عادة إلى التوسع في مجال التحليل قصد الحصول على نتائج مختلفة، فينصب اهتمامه على معرفة الحدود التي يمكن فيها إجراء التغيير في قيمة العوامل المكونة للنموذج الرياضي دون تغيير هدفه.

يعرف تحليل الحساسية بأنه أسلوب يقيس أثر التغيرات في مدخلات نموذج القرار على مخرجاته إذ يمكن من خلاله دراسة التغيرات في قيم ثوابت النموذج وتحديد إلى أي مدى يمكن لبعض هذه الثوابت أن يتذبذب قبل أن يصبح الحل الأمثل المحدد سابقا غير الأمثل. وكلما ارتفعت درجة حساسية القرار بالنسبة للتغيير في إحدى ثوابت النموذج كلما تطلب بذل مزيد من الجهد والوقت لتقدير قيمة هذا الثابت بعناية حتى لا نبتعد كثير عن المثالية فيما بعد.

معظم المشاكل الواقعية ذات بيانات ليست معروفة بشكل مؤكد على سبيل المثال تكلفة المواد الخام ربما تتغير بعد النموذج وبذلك الجانب الأيمن من القيود قد يتغير بسبب زيادة أو نقصان الموارد المتوفرة في السوق أو المعاملات ربما تتغير بسبب مواصفات المنتج ...إلخ.

وعليه يقصد بتحليل الحساسية معرفة مدى تأثر الحل الأمثل بالتغيرات التي قد تطرأ على المعطيات التي تم إعداد البرنامج الخطي على أساسها[1]، وهذه التغييرات يمكن أن تكون:

– **على معاملات متغيرات دالة الهدف** (C_j)؛ $\mathbf{Max(z)= 100x_1 +60 x_2 + 80x_3}$

- – على قيم الطرف الأيمن للقيود(الموارد المتاحة) (b_j)؛

مثال : قيد المادة الأولية M_1: $2 x_1 + x_2 \leq 16$

–على استخدامات الموارد (a_{ij}).

مثال : قيد المادة الأولية M_1: $2 x_1 + x_2 \leq 16$

من المعلوم أن الإدارات عموما ترغب دائما في إجراء بعض التغييرات على المعاملات المختلفة لأي مشكلة ما (نموذج البرمجة الخطية)، ويمكن معرفة أثر هذه التغييرات في المعاملات على الحل الأمثل عن طريق حل المسألة مرة أخرى، إلا أن هذا يتطلب إجراء حسابات كثيرة تتناسب طرديا مع عدد القيود والمتغيرات، وتحليل الحساسية هو الاسم المشتق من تحليل تغير الحل الأمثل وفقا لتغير المعاملات المختلفة، سواء كانت هذه المعاملات: مواد أولية، أيدي عاملة، تكاليف، أرباح...إلخ. لنأخذ المثال التالي الذي يبين كيفية تحديد الحدود الدنيا والحدود القصوى لدالة الهدف.

---

[1] أحمد محمد الهزاع الصمادي، مرجع سابق، ص 95.

2–حالة تغير معاملات متغيرات دالة الهدف– الحدود الدنيا والقصوى لدالة الهدف–:

في هذه الحالة قد تكون متغيرة القرار، إما متغيرة خارج الأساس، أو متغيرة أساس، لذا نميز بين حالتين:

1.2 الحالة الأولى: تغير المعامل c_j لمتغيرة القرار x_i خارج الأساس:

بغرض التعرف أكثر على هذه الحالة، سوف نأخذ المثال التالي:

مثال: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max}(z) = 100x_1 + 60x_2 + 80x_3$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 1200 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 1000 \\ 4x_1 + 12x_2 + 8x_3 \leq 3800 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \geq 0$$

والحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه يقدمه الجدول التالي:

الجدول رقم(1): $\text{Max}(z) = 100x_1 + 60x_2 + 80x_3$

c_j	م.أ B.V	b_i	100	60	80	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
100	x_1	150	1	0	½	1/3	-1/4	0
60	x_2	100	0	1	1	-1/3	½	0
0	s_3	2000	0	0	-6	8/3	-5	1
Z=21000			100	60	110	40/3	5	0
$\Delta Z = c_j - z_i$			**0**	**0**	**-30**	**-40/3**	**-5**	**0**

وبفرض يتغير معامل x_3 بمقدار (موجب أوسالب) يساوي Δc_3 فيصبح C' حيث أن: $C' = c_3 + \Delta c_3$

أي: $C' = 80 + \Delta c_3$ و بتعويض قيمة الجديدة في جدول الحل الأمثل نحصل على:

الجدول2:

c_j	م.أ B.V	b_i	100	60	80+ $\Delta c3$	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
100	x_1	**150**	1	0	½	1/3	-1/4	0
60	x_2	**100**	0	1	1	-1/3	½	0
0	s_3	**2000**	0	0	-6	8/3	-5	1
Z=21000			100	60	110	40/3	5	0
$\Delta Z= c_j-z_i$			**0**	**0**	**-30+ Δc_3**	**-40/3**	**-5**	**0**

عند تغير معامل x_3 فإن قيمة c_j-z_i تتغير فتصبح: $-30 + \Delta c_3$ ، ويبقى جدول الحل الأمثل إذا تحقق شرط الأمثلية لنموذج التعظيم $0 \geq C^{/} - z_3$:

$$C^{/} - z_3 \leq 0 \quad => \quad -30 + \Delta c_3 \leq 0 \quad => \quad \Delta c_3 \leq 30$$

أي أن الحل الأمثل الذي يقدمه الجدول يبقى أمثلا مادام مقدار التغير المتغيرة x_3 أقل أو يساوي 30، أما إذا تعدى هذه القيمة فإن الحل لا يبقى أمثلا.

لدينا $\Delta c_3 \leq 30$ بإضافة القيمة 80 للطرفين نحصل على:

$$\Delta c_3 + 80 \leq 30+80$$

$$\Delta c_3 + 80 \leq 110$$

نعلم أن: $C^{/} = 80+ \Delta c_3$ وعليه تكون: $C^{/} \leq 110$

أي أن الحل المتوصل إليه يبقى أمثلا مادام معامل المتغيرة x_3 أقل أو يساوي 110، أما إذا تعدى هذه القيمة فإنه لا يصبح حلا أمثلا.

- إذا كان مقدار التغير أقل من 30: تصبح في هذه الحالة قيمة $C^{/} - z_3$ سالبة، ما يحقق معيار الأمثلية، وبالتالي يبقى الحل الأمثل.
- إذا كان مقدار التغير مساويا تماما 30: تصبح في هذه الحالة قيمة $C^{/} - z_3$ معدومة، ما يحقق معيار الأمثلية، وبالتالي يبقى الحل الأمثل.
- إذا كان مقدار التغير أكبر من 30: تصبح في هذه الحالة قيمة $C^{/} - z_3$ موجبة، وهذا ما لا يحقق شرط الأمثلية، مما يستوجب إنشاء جدول آخر لتحسين الحل مرة أخرى.

2.2 الحالة الثانية: تغير المعامل c_j لمتغيرة القرار x_i كمتغيرة الأساس:

نأخذ المثال السابق وبإفتراض أن معامل المتغيرة الأساس x_1 يتغير بمقدار (موجب أوسالب) يساوي Δc_1 فيصبح $C_1^{/}$ حيث أن: $C_1^{/}= c_1 + \Delta c_1$ أي: $C_1^{/}= 100 + \Delta c_1$ و بتعويض قيمة الجديدة في جدول الحل الأمثل نحصل على:

الجدول1:

c_j	م.أ B.V	b_i	$100 + \Delta c_1$	60	80	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
$100 + \Delta c_1$	x_1	150	1	0	½	1/3	−1/4	0
60	x_2	100	0	1	1	−1/3	½	0
0	s_3	2000	0	0	−6	8/3	−5	1
Z=21000			$100 + \Delta c_1$	60	$110+1/2\ \Delta c_1$	$40/3+1/3\ \Delta c_1$	$5-1/4\ \Delta c_1$	0
$\Delta Z= c_j-z_i$			0	0	$-30-1/2\ \Delta c_1$	$-40/3-1/3\ \Delta c_1$	$-5+1/4\ \Delta c_1$	0

يبقى الحل الأمثل إذا تحقق شرط الأمثلية $c_j-z_i\leq 0$ للمتغيرات خارج الأساس، أي:

$$-30-1/2\ \Delta c_1\leq 0 \;\Rightarrow\; \Delta c_1\geq -60$$
$$-40/3-1/3\ \Delta c_1 \leq 0 \;\Rightarrow\; \Delta c_1\geq -40$$
$$-5+1/4\ \Delta c_1 \leq 0 \;\Rightarrow\; \Delta c_1\leq 20$$

$\geq -60 \quad \geq -40 \quad \leq$

نستنتج مما سبق أن: ($-40\leq \Delta c_1\leq 20$) أي أن الحل يبقى أمثلا ما دامت قيمة تغير معامل متغيرة الأساس x_1 أقل أو تساوي 20، وأكبر أو تساوي (−40).

لدينا: $-40\leq \Delta c_1\leq 20$ بإضافة القيمة 100 للطرفين نحصل على:

$$-40+100\leq 100+ \Delta c_1\leq 20 +100$$
$$60\leq 100+ \Delta c_1\leq 120$$

نعلم أن:

$$C_1^{/}= 100 + \Delta c_1$$

وعليه تكون:

$$\mathbf{60\leq C_1^{/}\leq 120}$$

أي أن الحل المتوصل إليه يبقى أمثلا ما دام معامل المتغيرة x_1 أقل أو يساوي 120، وأكبر أو يساوي 60، أما إذا تعدى هاتين القيمتين فإنه لا يصبح حلا أمثلا.

3- حالة تغير الطرف الأيمن للقيود الوظيفية (المتاح) b_j:

إذا تغير الطرف الأيمن للقيود الوظيفية (المتاح) في جدول الحل الأمثل، فإن ذلك سيؤدي إلى تغير قيم متغيرات الأساس.

$$\textbf{Max(z)} = 100x_1 + 60x_2 + 80x_3$$

$$S/C \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 1200 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 1000 \\ 4x_1 + 12x_2 + 8x_3 \leq 3800 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \geq 0$$

مثال:

يأخذ نفس المثال السابق، وتبعا لقيم عمود المتغيرة s_1 فإنه يمكن تفسير تلك القيم كما يلي:

الجدول الأولي:

c_j	م.أ B.V	b_i	100	60	80	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
100	x_1	150	1	0	½	1/3	-1/4	0
60	x_2	100	0	1	1	-1/3	½	0
0	s_3	2000	0	0	-6	8/3	-5	1
Z=21000			100	60	110	40/3	5	0
$\Delta Z = c_j - z_i$			0	0	-30	-40/3	-5	0

- 1/3: يمثل مقدار تغير (زيادة) قيمة متغيرة الأساس x_1 عند زيادة المتاح الأول b_1 بوحدة واحدة؛
- 1/3- : يمثل مقدار تغير (إنخفاض) قيمة متغيرة الأساس x_2 عند زيادة المتاح الأول b_1 بوحدة واحدة؛
- 8/3 : يمثل مقدار تغير (زيادة) قيمة متغيرة الأساس s_3 عند زيادة المتاح الأول b_1 بوحدة واحدة.

عند تغير المورد الأول b_1 بمقدار Δb_1 فيصبح $b_1' = b_1 + \Delta b_1$

فإن القيم الجديدة لمتغيرات الأساس تصبح عبارة عن القيم القديمة لمتغيرات الأساس مضافا إليها مقدار التغير في المتاح مضروبا في مقدار تغير قيمة متغيرة الأساس، فتكون على النحو التالي:

$$x_1 = 150 + 1/3\, \Delta b_1$$

$$x_2 = 100 - 1/3\, \Delta b_1$$

$s_3 = 2000 + 8/3\ \Delta b_1$

يبقى الحل أمثلا، إذا كانت القيم الجديدة لمتغيرات الأساس تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات، أي:

$$x_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 150 + 1/3\ \Delta b_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta b_1 \geq -450$$

$$x_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 100 - 1/3\ \Delta b_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta b_1 \leq 300$$

$$s_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2000 + 8/3\ \Delta b_1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta b_1 \geq -750$$

$$(-450 \leq \Delta b_1 \leq 300)$$

وهذا يعني أن الحل المتوصل إليه يبقى حلا أمثلا ما دام مقدار التغير في المورد الأول أقل أو يساوي 300 وأكبر أو يساوي (-450).

$$\text{Max}(z) = 100x_1 + 60x_2 + 80x_3$$

$$s/c \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 1200 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 1000 \\ 4x_1 + 12x_2 + 8x_3 \leq 3800 \end{cases}$$

لدينا : $(-450 \leq \Delta b_1 \leq 300)$

وبإضافة القيمة 1200 للطرفين نحصل على:

$$-450 + 1200 \leq 1200 + \Delta b_1 \leq 300 + 1200$$

$$750 \leq 1200 + \Delta b_1 \leq 1500$$

نعلم أن:

$b_1' = 1200 + \Delta b_1$ وعليه تكون: $750 \leq b_1' \leq 1500$

أي أن الحل المتوصل إليه يبقى أمثلا ما دام مجال تغير المورد الأول b_1 أقل أو يساوي 1500، وأكبر أو يساوي 750، أما إذا تعدى هاتين القيمتين فإنه لا يصبح حلا أمثلا.

فمثلا:

- إذا كان مقدار التغير أقل من 300: في هذه الحالة تصبح القيم الجديدة ($150 + 1/3\ \Delta b_1$) أكبر تماما من الصفر، أي أنها تحقق شرط عدم سلبية المتغيرات، وتتغير تبعا لذلك قيمة دالة الهدف.
- إذا كان مقدار التغير مساويا تماما 300: في هذه الحالة تصبح القيم الجديدة لإحدى متغيرات الأساس مساوية للصفر، أي أنها تحقق شرط عدم سلبية المتغيرات، وتتغير تبعا لذلك قيمة دالة الهدف.
- إذا كان مقدار التغير أكبر من 300: في هذه الحالة تصبح القيم الجديدة لإحدى متغيرات الأساس أقل تماما من الصفر، أي أنها لا تحقق شرط عدم سلبية المتغيرات، وبالتالي فإن الحل المتوصل إليه سيكون مرفوضا مما يستوجب تحسين الحل مرة أخرى عن طريق تطبيق خوارزمية الثنائية للسمبلكس.

تذكير بطريقة خوارزمية الثنائية للسمبلكس:

تحديد المتغيرة الخارجة أولا أي سطر الارتكاز والتي توافق أقل معامل سالب bi ؛

ب- بعد تحديد المتغيرة الخارجة يتم تحديد المتغيرة الداخلة أي عمود الارتكاز والتي توافق أقل معامل سالب في سطر الارتكاز؛ ت- تم عنصر الارتكاز؛

ومن ثم تحسين الحل بطريقة السمبلكس العادية إلى أن نصل إلى شرط عدم سلبية المتغيرات ومعيار الأمثلية.

ملاحظة:

- إذا ارتفعت قيمة مورد ما، حيث أن هذا المورد لم يتم استخدامه كليا في جدول الحل الأمثل، فإن متغيرات الأساس لن تتغير مهما كان مقدار الزيادة، وإنما يكون التغير (الزيادة) فقط على مستوى متغيرات الفجوة.

– إذا قيمة مورد ما، حيث أن هذا المورد لم يتم استخدامه كليا في جدول الحل الأمثل، فإنه يجب أن لا يكون مقدار الانخفاض أقل مما تحتاجه المؤسسة لإنتاج قيم متغيرات القرار (متغيرات الأساس).

4– مثال تطبيقي:

مثال: التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة):

لدينا المشكلة الأتية:

هدف المؤسسة $\mathbf{Max(z)= 30\ x_1 +50\ x_2}$

- **قيد المادة الأولية $\mathbf{M_1}$:** $2\ x_1 + x_2 \leq\ 16$
- **قيد المادة الأولية $\mathbf{M_2}$:** $x_1 +2\ x_2 \leq 11$
- **قيد الأيدي العاملة:** $x_1 +3\ x_2 +s_2 \leq 15$
- **شرط عدم السلبية:** $x_1 \geq 0\ ,\ \ x_2 \geq 0$

وكانت النتائج في الجدول الحل الأمثل (الأخير) كالآتي:

c_j	م.أ B.V	b_i	30	50	0	0	0
			x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
0	s_3	**2**	0	0	1/3	-5/3	1
30	x_1	**7**	1	0	2/3	-1/3	0
50	x_2	**2**	0	1	-1/3	2/3	0
Z=310			30	50	10/3	70/3	0
Z= c_j-z_iΔ			**0**	**0**	**-10/3**	**-70/3**	**0**

والحل الأمثل للمشكلة هو الآتي:

$x_1= 7,\quad x_2= 2\ ,\quad s_1= s_2= 0,\quad s_3= 2\ ,\quad z= 310$

بفرض أن قيد المادة الأولية $\mathbf{M_1}$ قد زاد (المادة الأولية **M1** المتاحة تغيرت من 16 إلى 20 كلغ)

المطلوب:

– أدرس تأثير هذه التغيرات (الموارد المتاحة= زيادة كميات المادة الأولية **M1**) على الحل الأمثل؟

الحل:

من الجدول الأخير للحل الأمثل:

c_j	م.أ B.V	b_i	**30** x_1	**50** x_2	**0** s_1	**0** s_2	**0** s_3
0	s_3	**2**	0	0	1/3	-5/3	1
30	x_1	**7**	1	0	2/3	-1/3	0
50	x_2	**2**	0	1	-1/3	2/3	0
Z=310			30	50	10/3	70/3	0
Z= c_j-z_jΔ			**0**	**0**	**-10/3**	**-70/3**	**0**

مصفوفة المتغيرات التي تقع تحت متغيرات المكملة -الفجوة-

الطرف الأيمن قد تغير (بمعنى قيود البرنامج قد تغيرت) من $\begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix}$ إلى $\begin{pmatrix} 20 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix}$

أي أن المورد الأول من المادة الأولية M_1 قد زاد من 16 كلغ إلى 20 كلغ متاح، ولدراسة تأثير هذا التغيير على الحل نقوم بالتالي:

- نقوم أولا بالتأكد من أن هذا التغيير ليس له تأثير في الحل الأمثل ما عدا التغير في الجانب الأيمن وكذلك يجب التأكد من أن قيم صف دالة الهدف سيبقى سالبا أو صفر.
- نقوم بضرب المصفوفة (قيم الجديدة للطرف الأيمن) معكوس المصفوفة (B^{-1}) الموجودة في جدول الحل الأمثل والتي تمثل المتغيرات الوهمية(متغيرات الفجوة) والتي تقع أسفل المتغيرات(s_1 , s_2, و s_3) في جدول الحل الأمثل.
- نحصل على قيم المتغيرات الأساسية الجديدة بتطبيق المعادلة الأتية:

$$\boxed{X_b = B^{-1} * b}$$

(يتم ضرب هذه المصفوفة في العمود الجديد (مع تطبيق القاعدة – المعادلة-)

حيث:

X_b: يمثل عمود المتغيرات الأساسية الناتجة في جدول الحل الأمثل الجديد.

B^{-1}: تمثل مصفوفة المتغيرات الوهمية (المكملة أو الفجوة) والتي تقع أسفل المتغيرات الفجوة في جدول الحل الأمثل.

B: تمثل عمود الموارد المتاحة الجديد.

وعليه نتحصل على:

$$\begin{pmatrix}\text{القيم}\\ \text{المثلى}\\ \text{الجديدة}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{المصفوفة}\\ \text{الاستراتيجية}\\ \text{مصفوفة الموارد}\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}\text{عمود}\\ \text{الموارد}\\ \text{الجديد}\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s_3\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}}_{X_b} = \underbrace{\begin{pmatrix}1/3 & -5/3 & 1\\ 2/3 & -1/3 & 0\\ -1/3 & 2/3 & 0\end{pmatrix}}_{B^{-1}} * \underbrace{\begin{pmatrix}20\\ 11\\ 15\end{pmatrix}}_{b} = \begin{pmatrix}20/3-55/3+15\\ 40/3-1/3+0\\ -20/3+22/3+0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_3\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10/3\\ 29/3\\ 2/3\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن جميع القيم العمود الناتج موجبة ويعني بذلك أن الحل يبقى الأمثل ولا يزال ممكنا بالقيم الجديدة وينتج عنه:

$x_1 = 29/3$, $x_2 = 2/3$, $s_1 = s_2 = 0$, $s_3 = 10/3$

أما دالة الهدف فنحصل عليها بالتعويض على النحو التالي:

$$Max(z) = 30\, x_1 + 50\, x_2$$

$$Max(z) = 30 * (29/3) + 50 * (2/3) = 323.33$$

$$z = 323.33$$

لو أخذنا نتيجة الحل للنموذج المقابل من الجدول الأخير نحصل على:

$$\mathbf{y_1 = s_1 = 10/3}$$

$$\mathbf{y_2 = s_2 = 70/3}$$

$$\mathbf{y_3 = s_3 = 0}$$

$$\mathbf{w = 310}$$

تمارين مقترحة:

التمرين1:

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Min } Z = 5x_1+3x_2+4x_3$$

$$S/C$$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3 \geq 80 \\ 2x_1+2x_2+3x_3 \leq 50 \\ x_1+3x_2+2x_3 = 40 \\ (x_1, x_2, x_3) \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

- إيجاد البرنامج الثنائي (تحويل النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل/الثنائي)

التمرين 2:

الجدول التالي هو جدول الحل الأمثل للمسألة الأولية:

c_j	م.أ B.V	b_i	20	30	50	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
30	x_2	**220/3**	1/6	1	0	1/3	0	–1/6
0	S_2	**280/3**	13/6	0	0	–5/3	1	1/6
50	x_3	**210**	1/2	0	1	0	0	1/2
Z=127000			30	30	50	10	0	20
$\Delta Z = c_j - z_i$			**–10**	**0**	**0**	**–10**	**0**	**–20**

المطلوب:

اعتمادا على الجدول أعلاه استنتج الحل الأمثل للمسألة الثنائية.

التمرين 3:

مؤسسة تنتج 3 منتوجات A،B،و C باستعمال عدة أنواع من المدخلات منها: البلاستيك، الآلات، اليد العاملة، الجدول الموالي يبين متطلبات الإنتاج ، الكميات المتوفرة من هذه المدخلات بالنسبة للشهر القادم وكذا الربح الخاص بهذه المنتوجات.

	A	B	C	الكمية أو الطاقة المتوفرة
مادة البلاستيك (كلغ)	12	10	8	1800
عمل الآلات (سا)	15	15	10	1800
يد عاملة (سا)	3	4	2	900
الربح(دج)	300	500	400	/

هذه المؤسسة متعاقدة مع مؤسسة ثانية من أجل تسليمها ما لا يقل عن 10 وحدة من المنتوج A شهريا.

إذا كان الحل الأمثل لهذه المسألة هو:

$x_1=10 \quad x_2=0 \quad x_3=165 \quad s_1=360 \quad s_2=0 \quad s_3=540 \quad s_4=0$

المطلوب:

- ما هو الحل الأمثل للمسألة الثنوية بطريقة قانون التكامل بين متغيرات الأصلية ومتغيرات الثنوية؟
- وما هو الشرح الاقتصادي لمتغيراتها؟

التمرين4:

لدينا المشكلة الأتية:

هدف المؤسسة $\mathbf{Max(z)= 5x_1 + 2x_2 + 3x_3}$

- **قيد العمل:** $x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 30$
- **قيد المواد الأولية M:** $x_1 - 5x_2 - 5x_3 \le 40$
- **شرط عدم السلبية:** $x_1 \ge 0 \;,\; x_2 \ge 0 \;,\; x_3 \ge 0$

وعلى إفترض s_1 و s_2 هي متغيرات الفجوة ،كانت النتائج في الجدول الحل الأمثل (الأخير) كالآتي:

c_j	م.أ B.V	b_i	5 x_1	2 x_2	3 x_3	0 s_1	0 s_2
5	x_1	**30**	1	5	2	1	0
0	s_2	**10**	0	0	-8	-1	1
Z=150			5	25	10	5	0
Z= c_j-z_iΔ			**0**	**-23**	**-7**	**-5**	**0**

والحل الأمثل للمشكلة هو الآتي:

$x_1=30, \quad x_2=0, \quad x_3=0 \quad s_1=0 \quad s_2=10, \quad z=150$

بفرض أن قيد العمل قد زاد بمقدار 5 وحدات من 30 إلى 35 وحدة (ساعة عمل).

المطلوب:

– أدرس تأثير هذه التغيرات على الحل الأمثل؟

المحور الرابع: مسائل النقل

(transportation problèms)

تمهيد

شروط استخدام طريقة النقل

صياغة مشكلة النقل

حل لمسائل النقل

-المرحلة الأولى: تحديد الحل الإبتدائي

-المرحلة الثانية: تحسين الحل الابتدائي.

حل مسائلة النقل بطريقة الشبكة (شبكة النقل)

حالات خاصة لنماذج النقل

تمهيد:

من بين المشاكل التي تواجهها المؤسسة من أجل تعزيز تنافسيتها واكتساب مكانة لائقة في السوق، مشاكل النقل. أي كيف يتسنى لمؤسسة ما توزيع منتجاتها من المصادر (وحدات إنتاج، موانئ أو مخازن) إلى وحدات التوزيع بأقل التكاليف الممكنة، مع أخذ بعين الاعتبار الكميات المتوفرة في المصادر من جهة والكميات المطلوبة من وحدات التوزيع من جهة أخرى.

ويمكن تعريف مشكلة النقل على أنها عبارة عن عملية نقل مواد متشابهة من الأصول (المركز الإنتاجي أو التسويقي)إلى النهايات (مركز الطلب أو مركز الاستهلاك)بأقل التكاليف أو زيادة الأرباح أو بأقل زمن ممكن.

هذا النوع من المشاكل(النقل) يمكن حله باستعمال البرمجة الخطية، إلا أن الوصول إلى الحل الأمثل يكون جد صعبا لأن عدد المتغيرات وعدد القيود يكون كبيرا نوعا ما، لهذا نلجأ إلى تقنيات خاصة بمسائل النقل.

فالبرمجة الخطية تستعمل للتوزيع الأمثل للموارد بالمؤسسة، أما طريقة النقل لها نفس هذه الخواص مضافا إليه شرط تساوي العرض مع الطلب.

1- شروط استخدام طريقة النقل:

لصياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل يتطلب توفر الشروط التالية:

-وجود عدد من المراكز الإنتاجية مقدارها n وعدد من المراكز التسويقية أو مراكز الطلب مقدارها m.

-كلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة من المركز التسويقي i إلى مركز الطلب معلومة j ومحددة وهي Cij.

- إن الكميات المنقولة من المراكز الإنتاجية إلى المراكز التسويقية محددة وهي Xij .

-يجب أن يتساوى مجموع المعروض من الطاقات (العرض) مع مجموع المطلوب منها(الطلب).

-تخفيض التكاليف الكلية إلى أقل ما يمكن.

-وجود هدف سواء أعلى إيراد (Max) أو أدنى تكاليف (Min).

ومن أجل توضيح مكونات وعناصر النموذج الرياضي لمشكلة النقل، يتطلب الأمر في البداية جدول يوضيح جدول النقل الذي على أساسه سوف يتم بناء وصياغة مشكلة النقل:

2- صياغة مشكلة النقل:

تصاغ مسائل النقل في جداول حيث تكون المصادر في الأسطر، ووحدات التوزيع في الأعمدة كالآتي:

نقاط التوزيع

المصادر	وحدة التوزيع A	وحدة التوزيع B	وحدة التوزيع C	وحدة التوزيع D	
وحدة الإنتاج X	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	b_1
وحدة الإنتاج Y	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}	b_2
وحدة الإنتاج Z	α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{34}	b_3
	a_1	a_2	a_3	a_4	

b_i: تمثل أقصى كمية موجودة في المصدر i ويخصص لها العمود الأخير؛

a_j: طلبية وحدة التوزيع j و يخصص لها السطر الأخير،

α_{ij} : تكلفة توزيع وحدة واحدة من المصدر i إلى نقطة التوزيع j .

مثال:

مؤسسة لديها 3 وحدات إنتاجية و3 حدات للتوزيع، الطاقة الإنتاجية لكل وحدة هي على التوالي 3700، 2000، 4300 وحدة في الشهر بينما طلبيات وحدات التوزيع قدرت بـ : 2500، 4000، 3500 وحدة في الشهر.

مصفوفة التكاليف هي:

	وحدة التوزيع A	وحدة التوزيع B	وحدة التوزيع C	
وحدة الإنتاج	3	2	1	**3700**
X	X_{11}	X_{12}	X_{13}	
وحدة الإنتاج	4	5	2	**2000**
Y	X_{21}	X_{22}	X_{23}	
وحدة الإنتاج	3	1	4	**4300**
Z	X_{31}	X_{32}	X_{33}	
	2500	**4000**	**3500**	

ونفترض أن X_{ij} الكمية المنقولة من وحدة الإنتاج i إلى وحدة التوزيع j فيكون لدينا:

- **النموذج الرياضي لطريقة النقل:**

أ– **دالة الهدف:** والتي قد تكون من نوع التعظيم (Max) أو التخفيض (Min).

$$\mathbf{Min(z)= 3x_{11} +2\, x_{12} + 1x_{13} + 4x_{21} +5\, x_{22} + 2x_{23}+3x_{31} +1\, x_{32} + 4x_{33}}$$

ب– **القيود:** والتي تتمثل في:

– **تساوي العرض مع الطلب.**

– **تساوي الكميات المعروضة مع المراكز مع طاقاتها الإنتاجية.**

– **تساوي الكميات المطلوبة مع ما يحصل عليه كل مستهلك**

ت– شرط عدم السلبية: أي عدم نقل كميات سلبية ومنه $xij\geq 0$

وعليه نتحصل في مثالنا على:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 3700$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 2000$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 4300$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 2500$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 4000$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{32} \leq 3500$$

شرط عدم السلبية: أي عدم نقل كميات سلبية ومنه $X_{ij}\geq 0$

من خلال المثال أعلاه نلاحظ بأنه من الأفضل عدم استعمال تقنية البرمجة الخطية لحل مثل هذه المسائل لأن ذلك يتطلب حل مسائل فيها عدد كبير من المتغيرات والقيود. لذا نلجأ إلى تقنيات خاصة بمسائل النقل.

3– حل لمسائل النقل:

للإشارة فإن حل مسائل النقل تمر بمرحلتين:

–**المرحلة الأولى:** تحديد الحل الإبتدائي

–**المرحلة الثانية:** تحسين الحل الابتدائي.

3–1 تحديد الحل الإبتدائي وطرق الحل:

هناك طرق مختلفة سواء لتحديد الحل الأساسي أو الأمثل.

سنتناول في البداية الطرق المستخدمة لغرض تحديد الحل الأساسي لغرض الوصول لخيارات تمثل نموذج نقل بأقل التكاليف. هناك ثلاث طرق لهذا الغرض:

أ– طريقة الركن الشمالي الغربي

ب- طريقة أقل كلفة ممكنة

ت- طريقة فوجل

ملاحظة: قبل التوزيع يجب دائما التأكد من أن   العرض = الطلب

- إيجاد الحل الأولي (الابتدائي) وفق توزيع الكميات بتطبيق قاعدة التوزيع التالية:

$$Xij = Min(ai\ bj)$$

- مراقبة أمثلية الحل وتحسينه خلال اتباع خطوات متتالية إلى غاية إيجاد الحل الأمثل.

وسنوضح طرق الحل وفق هذا المثال:

مثال:

تمتلك مؤسسة ما ثلاثة مصانع $(X1,X2,X3)$ لإنتاج المكاتب، ويتم شحن هذه المنتوجات من المصنع إلى ثلاثة مخازن $(Y1, Y2, Y3)$.

ويتم نقل المكاتب من المصانع إلى المخازن وفق التكاليف الوحدوية التالية:

- من المصنع $X1$ إلى المخازن $(Y1, Y2, Y3)$ بتكاليف (4،8،8) دج على التوالي؛
- من المصنع $X2$ إلى المخازن $(Y1, Y2, Y3)$ بتكاليف (16، 24، 16) دج على التوالي؛
- من المصنع $X3$ إلى المخازن $(Y1, Y2, Y3)$ بتكاليف (24، 16، 8) دج على التوالي.

وتقدر الطاقة الإنتاجية للمصانع $(X1,X2,X3)$ ب (77، 82، 56) مكتب في الشهر وعلى التوالي.

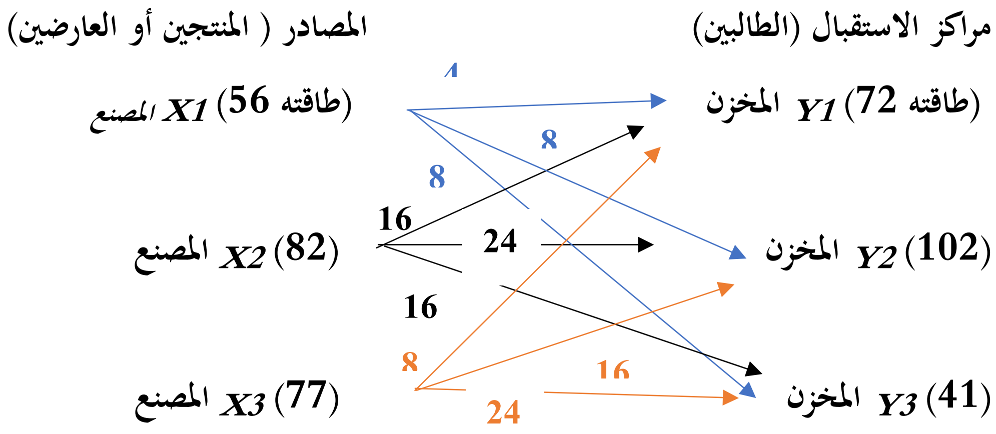
والطاقة الإنتاجية للمخازن $(Y1, Y2, Y3)$ ب (41، 102، 72) مكتب في الشهر وعلى التوالي.

المطلوب:

تحديد الخطة الواجب إتباعها في نقل المكاتب من المصانع إلى المخازن لتحقيق أدنى تكلفة نقل ممكنة (إيجاد الحل الأمثل)؟

الحل:

قبل حل هذه المسألة، يمكن توضيحها بيانيا كما يلي:



ولتشكيل النموذج الرياضي العام لهذه المسألة يجب تحديد ما يلي:

Cij= تكلفة نقل المكتب الواحد من المصنع (i) إلى المخزن (j)؛

Xij= عدد المكاتب المنقولة أو المعروضة من (i) إلى المخزن (j)؛

Z= مجموع تكاليف النقل؛ أو يمكن وضع : CT التكلفة الكلية

ai= عدد المكاتب المنتجة في المصنع (i)؛

bj= عدد المكاتب المطلوبة في المخزن (j)؛

في مثالنا هذا لدينا:

n= عدد المصانع وعددها 3؛

m= عدد المخازن وعددها 3.

$$\begin{cases} \boldsymbol{Min\ Z} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{Cij\ Xij} \\ \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{Xij} = \boldsymbol{ai}, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1,2,3} \\ \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{Xij} = \boldsymbol{bj}, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{1,2,3} \\ \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{ai} = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{bj} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Xij} \geq \boldsymbol{0}$$

وبتطبيق قاعدة التوزيع المذكورة سابقا $\boldsymbol{Xij} = Min\ (ai, bj)$ سيتم التوزيع لإيجاد الحل الأولي (المبدئي) بتطبيق إحدى هذه الطرق وهي:

أ–طريقة زاوية الشمال الغربي:

من خلال إسم هذه الطريقة، فإن التوزيع يبدأ من الخانة التي تقع في أقصى الشمال الغربي (أول خانة يسارا) حيث نطبق القاعدة $\boldsymbol{Xij} = Min\ (ai, bj)$ وكلما نوزع كمية نطرح الباقي أفقيا ثم ننتقل إلى بقية الخانات وهكذا إلى غاية توزيع كل الكميات.

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$	$y2$	$y3$	Σ العرض
$X1$	4	8	8	56
$X2$	16	24	16	82
X_3	8	16	24	77
Σ الطلب	72	102	41	215

الخطوة1: خانة الإنطلاق أول خانة يسارا. بتطبيق القاعدة نختار 56 ما بين 72/56

المخازن (*yi*) / المصانع (*Xi*)	*y1*		*y2*		*y3*		العرض Σ
X1	**56**	4	x	8	x	8	**56 0**
X2		16		24		16	**82**
x3		8		16		24	**77**
الطلب Σ	**72 16**		**102**		**41**		**215**

الخطوة2: لسطر الأول أصبح يساوي صفر ، وعليه ننتقل للسطر الثاني نضع في الخانة 16 بتطبيق القاعدة ما بين 82/16

المخازن (*yi*) / المصانع (*Xi*)	*y1*		*y2*		*y3*		العرض Σ
X1	**56**	4	x	8	x	8	**56 0**
X2	**16**	16		24		16	**82 66**
x3	X	8		16		24	**77**
الطلب Σ	**72 16 0**		**102**		**41**		**215**

الخطوة3: السطر2 باقي 66 وعليه بتطبيق القاعدة ما بين 102/66 نختار الأقل وهو 66 وعليه يصبح السطر يساوي صفر.

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$		$y2$		$y3$		العرض Σ
$X1$	***56***	*4*	x	*8*	x	*8*	**56 0**
$X2$	***16***	*16*	***66***	*24*	x	*16*	**82 66 0**
$x3$	X	8		16		24	**77**
الطلب Σ	**72 16 0**		**102 36**		**41**		**215**

الخطوة 4 :ننتقل إلى السطر الثالث، العمود الثاني 77/36 نضع 36 ،فيصبح العمود الثاني مساوي للصفر، ننتقل للعمود الثالث يبقى 41.

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$		$y2$		$y3$		العرض Σ
$X1$	***56***	*4*	x	*8*	x	*8*	**56 0**
$X2$	***16***	*16*	***66***	*24*	x	*16*	**82 66 0**
$x3$	X	8	**36**	16	**41**	24	**77 41 0**
الطلب Σ	**72 16 0**		**102 36 0**		**41 0**		**215**

يمثل هذا الجدول الحل الأولي (المبدئي).

نقوم بحساب التكلفة الكلية تساوي:(CT)

CT= $56(4)+16(16)+66(24)+36(16)+41(24)=$ ***3624 DA***

ملاحظة: إن الحل بطريقة زاوية الشمال الغربي يأخذ شكل سلم أي:

- **تقييم طريقة زاوية الشمال الغربي:**
  - أهم مزاياها: - سهولة التطبيق.
  - أهم عيوبها: - تهمل عنصر التكاليف عند التوزيع؛
    - تتطلب جداول كثيرة للوصول إلى الحل الأمثل.

ب- طريقة أقل كلفة ممكنة:

تتضمن هذه الطريقة الخطوات الآتية:

1-يتم تحديد الخلية الأقل تكلفة من بين جميع خلايا النموذج.

2-خصم أقل كلفة في الصف أو العمود (الخلية المحددة في 1) من عدد الوحدات المراد نقلها.

3-يتم الانتقال إلى الخلية التي تحتوي ثاني أقل كلفة وتطبق عليها نفس ما جاء في 2.

4-يتم تكرار العملية لغاية الانتهاء من خصم جميع الوحدات في الصفوف والأعمدة.

تعتمد هذه الطريقة في التوزيع على التكاليف في الجدول ككل وذلك كما يلي:

الخطوة1:

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$		$y2$		$y3$		العرض Σ
$X1$	**56**	4	x	8	x	8	56 0
$X2$		16		24		16	82
$x3$		8		16		24	77
الطلب Σ	72 16		102		41		215

أقل تكلفة في الجدول

الخطوة2:

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$		$y2$		$y3$		العرض Σ
X_1	**56**	**4**	x	**8**	x	**8**	56 0
$X2$	x	16		24		16	82
$x3$	**16**	**8**		16		24	77 61
الطلب Σ	72 16 0		102		41		215

ثاني أقل تكلفة

– ثاني أقل تكلفة في الجدول هي 8، الملاحظ أن في سطر المصدر الأول x1 أصبح يساوي صفر وعليه نختار الخانة التابعة للمصدر (المصنع x3). وبتطبيق القاعدة أقل عدد ما بين 16 و 77 يتم توزيع 16.

الخطوة3:

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$		$y2$		$y3$		العرض Σ
X_1	**56**	4	x	8	x		0
X_2	x	16		24	**41**	16	82 41
X_3	**16**	8		16	x	24	77 61
الطلب Σ	72 16 0		102		41 0		215

ثالث أقل تكلفة

– هناك ثلاث قيم بتكلفة 16، نختار سطر المصدر الثاني x_2 .

الخطوة4:

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$		$y2$		$y3$		العرض Σ
$X1$	**56**	4	x	8	x	8	56 0
$X2$	x	16		24	**41**	16	82 41
$x3$	**16**	8	61	16	x	24	77 61 0
الطلب Σ	72 16 0		102 41		41 0		215

ثالث أقل تكلفة

-في هذه الحالة عند تكلفة 16 ثالث أقل قيمة: هناك كميتان 102/ 61 نطبق القاعدة أقل قيمة وهي 61.

الخطوة5:

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$		$y2$		$y3$		العرض Σ
$X1$	**56**	4	x	8	x	8	56 0
$X2$	x	16	**41**	24	**41**	16	82 41 0
$x3$	**16**	8	61	16	x	24	77 61 0
الطلب Σ	72 16 0		102 41 0		41 0		215

نحسب قيمة *التكلفة الكلية:*

CT = 56 (4) + 41 (24) + 41 (16) + 16 (8) + 61 (16)=2968 DA

نلاحظ أن هذا التوزيع في الواقع هي أفضل من الطريقة السابقة نظرا لقيمة التكلفة الكلية المتحصل عليها.

- **تقييم طريقة(أقل كلفة ممكن) أدنى عنصر في الجدول:**

تعتبر من أفضل الطرق في التطبيق لأنها تدرس التكاليف في الأسطر والأعمدة معا.

ث- طريقة الجزاء والعقاب -فوجل-((Vogel:

تعتبر هذه الطريقة الأفضل في التطبيق لأنها تقوم على التوزيع حسب التكاليف، ويتم تطبيقها بإتباع الخطوات التالية:

- خطوة1: نحسب الفرق بين أقل كلفتين للنقل لكل سطر ولكل عمود.
- خطوة2: يتم اختيار أكبر فرق في الصف أو العمود وإذا تساوت القيم فيكون الاختيار عشوائي.
- خطوة3: يتم اختيار أقل تكلفة في الصف أو العمود المحدد في الخطوة السابقة (خطوة2)، ويتم خصم أقل وحدات من صف وعمود تلك الخلية. (نوزع حسب أدنى تكلفة).
- خطوة4: يتم حذف الصف أو العمود الذي تم تصفيره (أي يساوي =0) أثناء عملية الخصم في الخطوة السابقة(خطوة3).
- يتم إعادة الخطوات السابقة بشكل مستمر حتى يتم تصفير كافة الصفوف والأعمدة.

ملاحظة: عند تساوي الفوارق يمكن أن نوزع في الخانة ذات أدنى تكلفة. .

الخطوات: – نحسب الفرق بين أقل كلفتين للنقل لكل سطر ولكل عمود.

– أكبر فرق في هذه الحالة هو (8). وعليه الاختيار يكون عشوائي أو نوزع في الخانة ذات أدنى تكلفة.

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$	$y2$	$y3$	العرض Σ	الفرق
$X1$	4	8	8	56	(4)
$X2$	16	24	16	82	(0)
$x3$	8	16	24	77	(8)
الطلب Σ	72	102	41	215	
الفرق	(4)	(8)	(8)		

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$		$y2$		$y3$		العرض Σ	الفرق
$X1$	**X**	4	**56**	8	**X**	8	56 0	(4)
$X2$		16		24		16	82	(0)
$x3$		8		16		24	77	(8)
الطلب Σ	72		102 46		41		215	
الفرق	(4)		(8)		(8)			

– يتم حذف الصف أو العمود الذي تم تصفيره (أي يساوي =0)

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$		$y2$		$y3$		العرض Σ	الفرق
$X1$	**X**	4	**56**	8	**X**	8	56 0	(4)
$X2$		16		24		16	82	(0)
$x3$		8		16		24	77	(8)
الطلب Σ	72		102 46		41		215	
الفرق	(4)		(8)		(8)			

– نعيد حساب الفرق بين أقل كلفتين للنقل في كل صف وعمود.

– بعد القيام بجميع الخطوات السابقة نقوم بحذف العمود الذي يساوي صفر.

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$	$y2$	$y3$	العرض Σ	الفرق
$X1$	X 4	56 8	X 8	56 0	(4)
$X2$	X 16	24	16	82	(0) (0)
$x3$	72 8	16	24	77 5	(8) (8)
الطلب Σ	72 0	102 46	41	215	
الفرق	(4) (8)	(8) (8)	(8) (8)		

–نطبق نفس الخطوات السابقة: أكبر فرق 8 في جميع الأسطر والأعمدة المتبقية وعليه نختار الخانة أقل تكلفة. في هذه الحالة 16.

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$	$y2$	$y3$	العرض Σ	الفرق
$X1$	X 4	56 8	X 8	56 0	(4)
$X2$	X 16	24	41 16	82 41	(0) (0) (0)
$x3$	72 8	16	24	77 5	(8) (8) (8)
الطلب Σ	72 0	102 46	41 0	215	
الفرق	(4) (8)	(8) (8) (8)	(8) (8) (8)		

– يبقى العمود الثاني المتبقي، يتم اختيار خلية أقل تكلفة المقابلة (16).

– بتطبيق القاعدة يتم اختيار ما بين 46/5 وعليه يتم ملأ الخانة بقيمة 5.

المخازن (*yi*) / المصانع (*Xi*)	*y1*	*y2*	*y3*	العرض Σ	الفرق
X1	**X** 4	**56** 8	**X** 8	56 0	(4)
X2	**X** 16	24	**41** 16	82 41	(0) (0) (0)
x3	**72** 8	5 16	24	77 5 0	(8) (8) (8)
الطلب Σ	72 0	102 46 41	41 0	215	
الفرق	(4) (8)	(8) (8) (8)	(8) (8) (8)		

المخازن (*yi*) / المصانع (*Xi*)	*y1*	*y2*	*y3*	العرض Σ	الفرق
X1	**X** 4	**56** 8	**X** 8	56 0	(4)
X2	**X** 16	**41** 24	**41** 16	82 41 0	(0) (0) (0)
x3	**72** 8	5 16	24	77 5 0	(8) (8) (8)
الطلب Σ	72 0	102 46 41 0	0 41	215	
الفرق	(4) (8)	(8) (8) (8)	(8) (8) (8)		

وفي الأخير يصبح الجدول النهائي:

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	$y1$	$y2$	$y3$	العرض Σ	الفرق
$X1$	X 4	56 8	X 8	56 0	(4)
$X2$	X 16	41 24	41 16	82 41 0	(0) (0) (0)
$x3$	72 8	5 16	X 24	77 5 0	(8) (8) (8)
الطلب Σ	72 0	102 46 41 0	41 0	215	
الفرق	(4) (8)	(8) (8) (8)	(8) (8) (8)		

نحسب قيمة *التكلفة الكلية:*

$$CT=Z = 56\ (8) + 41\ (24) + 41\ (16) + 72\ (8) + 5\ (16) = 2744\ DA$$

نلاحظ تغير التوزيع وأنها خفضت تكاليف النقل إلى $CT = 2744$ مقارنة بالطريقتين السابقتين:

- طريقة الركن الشمالي الغربي: **3624 DA**
- طريقة أقل كلفة ممكنة: **2968 DA**

➢ **تقييم طريقة فوجل:**

تعتبر أفضل الطرق على الإطلاق لأنها تسمح بالوصول إلى الحل الأمثل بسرعة، حيث في معظم الحالات بالجدول الأول.

3-2 المرحلة الثانية: تحسين الحل الابتدائي (مرحلة اختبار الحل وسيرورة تحسينه)

وتتم بإحدى الطريقتين الأولى تعرف بطريقة المسار المتعرج والثانية تعرف بطريقة عوامل الضرب.

أ- **طريقة المسار المتعرج (طريقة التخطي)**: فكرة هذه الطريقة هي البحث عن الخلايا غير الداخلة في الحل والتي من شأنها أن تدني التكلفة الكلية في حالة إدخالها إلى الحل، لذا ينبغي اختبار الخلايا غير الداخلة (الفارغة) في الحل إذا ما كان

إمرار أي وحدة عبرها يؤدي إلى خفض التكاليف، أي ينبغي إيجاد ما نصطلح عليه بالتكاليف الحدية (تكاليف الوحدة الواحدة) لكل خلية غير داخلة في الحل.

المقصود بالخلايا غير الداخلة في الحل/ الخلايا الفارغة: تلك المربعات الموجودة في المصفوفة والتي لم يتم النقل إليها، أي التي تحتوي على Xij=0 ، ويمكن تلخيص هذه الطريقة في الخطوات التالية:

- يتم تحديد ورسم مسارات الخلايا الفارغة،
- يتم حساب القيم الجبرية للخلايا الفارغة،
- يتم اختيار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية الأشد سلبية وتتم دراسة مسارها، وذلك بأخذ مسار مغلق (إشارته بالتناوب +، -، + ...) ويتم اختيار أصغر قيمة من بين الزوايا التي تحمل الإشارة (-)؛
- تكرر هذه العمليات إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية للخلايا تكون موجبة أو مساوية للصفر والذي يعني الوصول إلى الحل الأمثل.

ملاحظة: نحدد حلقة مغلقة لكل متغير غير أساسي تبدأ وتنتهي الحلقة عنده. المسار ينطلق من الخلية الفارغة مرورا بالخلايا المملوءة وبخطوط مستقيمة مشكلة زوايا قائمة وصولا إلى نفس الخلية مشكلة حلقة. نستخدم هذه الحلقات للتأكد فيما قيمة دالة الهدف ستتحسن عندما تزداد قيمة المتغير غير الأساسي أكثر من قيمته الصفرية الحالية بمقدار وحدة واحدة والحفاظ على الحل المقبول نطرح ونضيف لعناصر أركان الحلقة بالتناوب وحدة واحدة بحيث تحافظ على تحقيق قيود العرض والطلب وعند ذلك نحسب صافي الزيادة والنقصان في الكلفة Cij.

مثال:

قم باختيار الحل الأساسي الأول (طريقة الركن الشمالي الغربي) المعطى في الجدول التالي، وأوجد الحل الأمثل بطريقة التخطي المسار المتعرج (SSM-stepping stone method-).

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	2 X11	5 X12	3 X13	1 X14	**90**
S2	3 X21	1 X22	2 X23	4 X24	**80**
S3	4 X31	2 X32	1 X33	5 X34	**70**
الطلب	**40**	**50**	**110**	**40**	**240**

أولا: نقوم بحل هذا المثال باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي للحصول على الحل الابتدائي ومن ثم تحسين الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج.

حل مسألة النقل باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي:

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	2 / 40	5 / 50	3 / /	1 / /	90
S2	3 / /	1 / /	2 / 80	4 / /	80
S3	4 / /	2 / /	1 / 30	5 / 40	70
الطلب	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\,(40)+5\,(50)+2\,(80)+1\,(30)+5\,(40) = 720$$

ثانيا: سنقوم بتحسين الحل الابتدائي، ولكن قبل ذلك ينبغي علينا التأكد من عدد الخلايا المملوءة (عدد الخلايا الداخلة في الحل).

- ❖ عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) -1

حيث m : عدد الأسطر(المصادر)

و n : عدد الأعمدة (المصبات/ مراكز التوزيع)

وحسب مثالنا فإن عدد الخلايا الداخلة (المملوءة) في الحل يجب أن تساوي 3+4−1=6، بينما في الجدول عدد الخلايا المملوءة يساوي 5 وهو شرط غير محقق. لهذا نضيف للخلية مملؤة كمية معدومة مساوية للصفر، كما يلي:

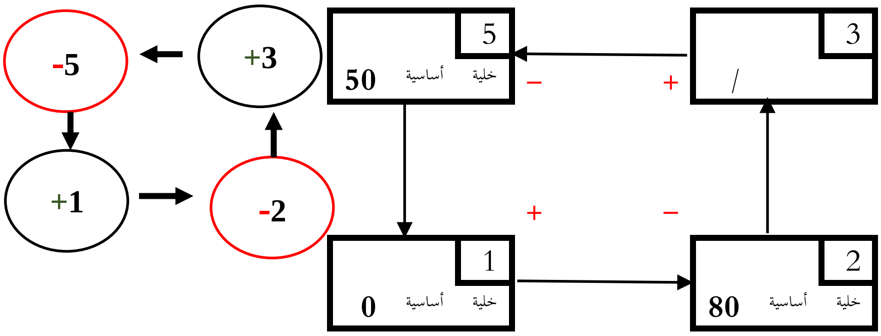
حل مسألة النقل باستخدام طريقة المسار المتعرج

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	2 / 40	5 / 50	3 / /	1 / /	90
S2	3 / /	1 / 0	2 / 80	4 / /	80
S3	4 / /	2 / /	1 / 30	5 / 40	70
الطلب	40	50	110	40	240

وبذلك نتحصل على خلايا 6 خلايا غير مملوءة يتم حساب قيمها الجبرية كما يلي:

– مثال عن كيفية تحديد المسار المتعرج للخلية الفارغة الأولي x_{13} .

مسار الحلقة $x_{13} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13}$



$$x_{13} = 3 - 5 + 1 - 2 = -3$$

	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	2 40	5 50	3 /	1 /	90
S_2	3 /	1 0	2 80	4 /	80
S_3	4 /	2 /	1 30	5 40	70
الطلب	40	50	110	40	240

تحديد المسار المتعرج للخلية الفارغة الأولي x_{14}:

$x_{14} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{14}$

$$x_{14} = 1 - 5 + 1 - 2 + 1 - 5 = -9$$

	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	2 / 40	5 / 50	3 / ⁄	1 / ⁄	90
S_2	3 / ⁄	1 / 0	2 / 80	4 / ⁄	80
S_3	4 / ⁄	2 / ⁄	1 / 30	5 / 40	70
	40	50	110	40	240

في الأخير نتحصل على القيم الجبرية لمسارات الخلايا الفارغة:

$x_{13} = 3 - 5 + 1 - 2 = -3$

$x_{14} = 1 - 5 + 1 - 2 + 1 - 5 = -9$

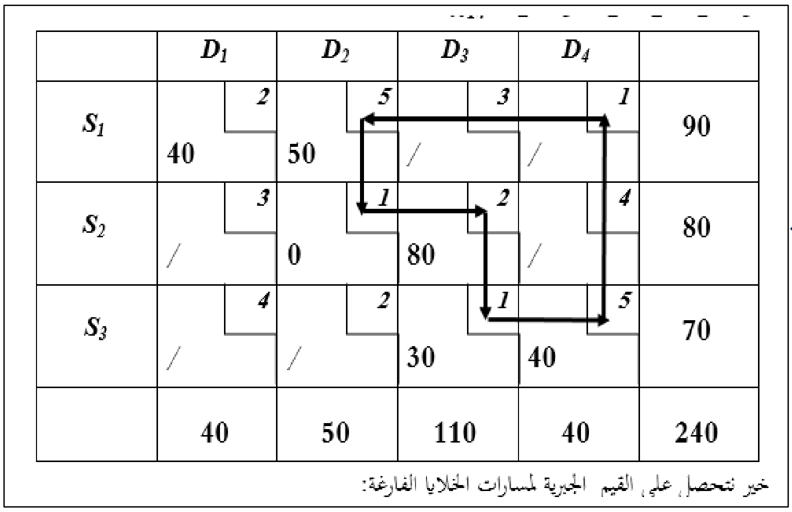
$x_{21} = 3 - 2 + 5 - 1 = 5$

$x_{24} = 4 - 5 + 1 - 2 = -2$

$x_{31} = 4 - 2 + 5 - 1 + 2 - 1 = 7$

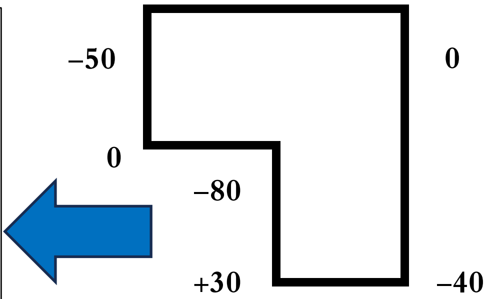
$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = \mathbf{2}$

بالنظر إلى القيم الجبرية نلاحظ أن الخلية x_{14} هي الأشد سالبية حيث تمكِّن من تخفيض التكاليف بمقدار 9 لكل وحدة منقولة عبرها، و بالتالي سندرس مسارها:



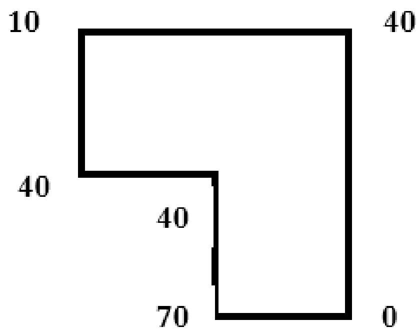
	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	2 / 40	5 / 50	3 / ⁄	1 / ⁄	90
S_2	3 / ⁄	1 / 0	2 / 80	4 / ⁄	80
S_3	4 / ⁄	2 / ⁄	1 / 30	5 / 40	70
	40	50	110	40	240

خير نتحصل على القيم الجبرية لمسارات الخلايا الفارغة:



بما أن أقل كمية هي 40=$(Min : 40, 80, 50)$، إذا ستأخذ الخلية الفارغة x_{14} هذه القيمة (40) (إضافة +40 إلى خلايا المسار التي حملناها إشارة (+)، وننقص −40 من خلايا المسار التي حملناها إشارة (−)و يصبح المسار كالتالي:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 10	3 /	1 40	90
O_2	3 /	1 40	2 40	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 70	5 0	70
b_i	40	50	110	40	240



	D_1	D_2	D_3	D_4	
S_1	2 40	5 50−40	3 /	1 0+40	90
S_2	3 /	1 0+40	2 80−40	4 /	80
S_3	4 /	2 /	1 30+40	5 40−40	70
	40	50	110	40	240

وعليه يصبح جدول النقل كالتالي:

الجدول رقم 3: تحسين الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\,(40)+5\,(10)+1\,(40)\,)+1\,(40)+2\,(40)+1\,(70)+5\,(0) = 360$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 360 وحدة نقدية (360 = 360 – 720).

يتم تكرار العملية السابقة لاختيار الخلايا الفارغة بعد التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة هي: $(m+n\text{-}1)$

مسار الحلقة $x_{13} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13}$

$$x_{13} = 3 - 5 + 1 - 2 = -3$$

مسار الحلقة $x_{21} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{2}$

$$x_{21} = 3 - 2 + 5 - 1 = 5$$

مسار الحلقة $x_{24} \rightarrow x_{14} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22}$

$$x_{24} = 4 - 1 + 5 - 1 = 7$$

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(2) 40	(5) 10	(3) /	(1) 40	90
O_2	(3) /	(1) 40	(2) 40	(4) /	80
O_3	(4) /	(2) /	(1) 70	(5) 0	70
b_i	40	50	110	40	240

مسار الحلقة $x_{31} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31}$

$$x_{31} = 4 - 1 + 2 - 1 + 5 - 2 = 7$$

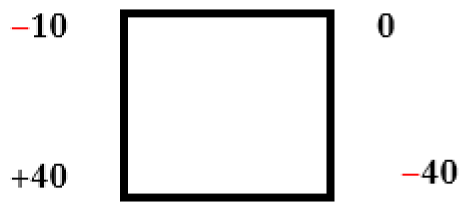
مسار الحلقة $x_{32} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{32}$

$$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$$

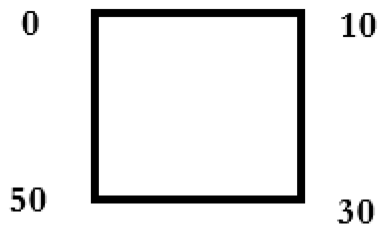
مسار الحلقة $x_{34} \rightarrow x_{14} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{34}$

$$x_{34} = 5 - 1 + 5 - 1 + 2 - 1 = 9$$

نلاحظ أن الخلية x_{13} ستساهم في تخفيض التكاليف بمقدار (3–) لكل وحدة منقولة، وعليه يجب دراسة مسارها.



بما أن أقل قيمة هي 10=$(min : 40, 10)$، إذا ستأخذ الخلية الفارغة x_{13} هذه القيمة و يصبح المسار كالتالي:



وعليه يصبح جدول النقل كالتالي:

تحسين الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج للمثال

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 0	3 10	1 40	90
O_2	3 /	1 50	2 30	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 70	5 0	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2(40) + 5(0) + 3(10) + 1(40) + 1(50) + 2(30) + 1(70) = 330$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 30 وحدة نقدية (360 – 330 = 30).

يتم تكرار العملية السابقة لاختيار الخلايا الفارغة بعد التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة هي: $(m+n-1)$

$$x_{12} = 5 - 3 + 2 - 1 = 3$$
$$x_{21} = 3 - 2 + 3 - 2 = 2$$
$$x_{24} = 4 - 1 + 3 - 1 = 4$$
$$x_{31} = 4 - 1 + 3 - 2 = 4$$
$$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$$
$$x_{34} = 5 - 1 + 3 - 1 = 6$$

نلاحظ أن جميع القيم الجبرية موجبة، مما يعني أن الحل المتوصل إليه هو الحل الأمثل، وعليه فإن تكلفة النقل في هذه الحالة تساوي 330 و.ن.

ب–طريقة عوامل الضرب (التوزيع المعدل– مودي Modi):

طبقا لهذه الطريقة يمكن حساب النتيجة لكل خلية شاغرة دون الحاجة إلى رسم كل المسارات المغلقة، تستخدم هذه الطريقة لاختبار أمثلية الحل الأولي، وهي أكفأ من سابقتها، والتي تعتمد على تكوين مسارات مغلقة للمتغيرات غير الأساسية ومن ثم إيجاد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل، أما هذه الطريقة فهي قادرة على تحديد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل مباشرة، وتتلخص هذه الطريقة فيما يلي: [1]

[1] حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، **مدخل إلى بحوث العمليات**، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى 2007، ص 307.

- يبدأ الحل المبدئي بأي طريقة؛

- نرمز لكل سطر (الوحدة الإنتاجية) بالرمز U_i،

- ونرمز لكل عمود (مركز التوزيع) بالرمز V_j؛

- بالنسبة الخلايا المملوءة أو(الخلايا المشغولة) كل متغيرة أساسية (في جدول النقل) يتم تطبيق المعادلة:

$$C_{ij} = U_i + V_i$$

بوضع $U_1=0$

لنتمكن من الحصول على باقي القيم ($U_2, U_3, \ldots$) و ($V_1, V_2, \ldots$).

- بالنسبة لتقييم الخلايا الفارغة أو(الخلايا غير المشغولة) بحساب التكاليف ،كل متغيرة غير أساسية في جدول النقل تكتب بصيغة المعادلة التالية:

$$\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

- مقياس التحسين هو: $C_{ij} - U_i - V_j$ أي الخلية التي ترتيبها في الصف(السطر) i، والعمود j.

- إذا وجدنا القيمة الموجبة، هذا يعني أنه لا يمكن تخفيض تكاليف النقل، أما إذا كانت سالبة فإنه يمكن تخفيض تكاليف النقل ثم إكمال الحل باستخدام طريقة نقطة الارتكاز.

- نختار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية الأشد سالبية وتتم دراسة مسارها وفقا للقاعدة (المعروفة في الطريقة السابقة):

* أن يبدأ المسار من الخلية الفارغة المعنية وينتهي عندها؛

* أن يتألف المسار من مجموعة من المستقيمات الأفقية والعمودية بحيث تقع الخلايا المملوءة في الزوايا القائمة؛

* وضع إشارة (+) للخلية الفارغة المراد ملؤها ثم إشارة (–) للخلية التي تليها في المسار ثم إشارة (+) للخلية التي تليها في المسار، وهكذا تتالي الإشارات (+) و (–) إلى نهاية المسار المغلق.

* أقل قيمة في الخلايا التي تحمل إشارة (–) يتم إضافتها إلى الخلايا التي تحمل إشارة (+) وإنقاصها من قيم الخلايا التي تحمل إشارة (–).

* تعديل الجدول وفقا لما تم في الخطوة السابقة وإعادة الخطوات.

- يتم تكرار هذه العملية إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية موجبة أو معدومة.

ملاحظة:

إن تطبيق هذه الطريقة يتطلب أن يكون الحل الأولي أساسي:

عدد المتغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) = عدد الصفوف + عدد الأعمدة –1

مثال:

لدينا الجدول التالي يمثل الحل الأولي لمشكلة النقل بطريقة اقل التكاليف لمؤسسة حبوب الجنوب.

الحل الابتدائي لمشكلة النقل بطريقة أقل التكاليف

	D1	D2	D3	العرض
S1	(2) /	(1) 100	(8) /	100
S2	(7) 30	(4) /	(3) 220	250
S3	(6) 120	(2) 80	(4) /	200
الطلب	150	180	220	550

المطلوب:

اختبار أمثلية الحل الأولي لمشكلة النقل باستخدام طريقة التوزيع المعدل (Modi)

الحل:

- عدد الخلايا المشغولة (المملوءة) = عدد الصفوف + عدد الأعمدة -1

= 3+3 -1=5

- التكلفة الكلية= (2)80+(6)120+(3)220+(7)30+(1)100= 1850

- نوضع $U_1=0$

حساب الرقم القياسي لكل صف(U_i) ولكل عمود(V_j)

	D1	D2	D3	العرض	
S1	(2) /	(1) 100	(8) /	100	$U_1=0$
S2	(7) 30	(4) /	(3) 220	250	$U_2=2$
S3	(6) 120	(2) 80	(4) /	200	$U_3=1$
الطلب	150	180	220	550	
	$V_1=5$	$V_2=1$	$V_3=1$		

-حساب الرقم القياسي بالنسبة للخلايا المشغولة ويتم حساب باقي القيم $(U_2, U_3, \ldots)$ و $(V_1, V_2, \ldots)$، وفقا للمعادلة: $C_{ij} = U_i + V_j$

طريقة حساب الرقم القياسي لكل صف(U_i) ولكل عمود(V_j)

الخلية	$U_i + V_i = C_{ij}$	(U_i) ، (V_j)
الخلية(1،2)	$U_1+V_2=1$ $0+V_2=1$	$V_2=1$
الخلية(3،2)	$U_3+V_2=2$ $U_3+1=2$	$U_3=1$
الخلية(3،1)	$U_3+V_1=6$ $1+V_1=6$	$V_1=5$
الخلية(2،1)	$U_2+V_1=7$ $U_2+5=7$	$U_2=2$
الخلية(2،3)	$U_2+V_3=3$ $2+V_3=3$	$V_3=1$

– تقييم الخلايا الفارغة:

بالنسبة للخلايا الفارغة يتم حسابها وفقا للمعادلة: $\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

تقييم الخلايا الفارغة

الخلية الفارغة	U_i، V_j	مسار الخلية	صافي التغير في التكلفة $\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$
الخلية(1،1)	$U_1= 0$ $v_1=5$	(2،1)،(3،2) ،(3،1)،(1،1)	2-0-5=**-3**
الخلية(1،3)	$U_1= 0$ $v_3=1$	/	8-0-1=7
الخلية(2،2)	$U_2=2$ $v_2=1$	/	4-2-1=1
الخلية(3،3)	$U_3= 1$ $v_3=1$	/	4-1-1=2

المسار المغلق الخلية (1،1):

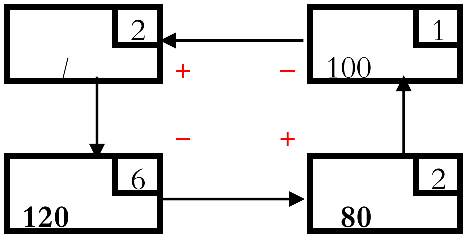
	D1	D2	D3	العرض
S1	2 /	1 **100**	8 /	**100**
S2	7 **30**	4 /	3 **220**	**250**
S3	6 **120**	2 **80**	4 /	**200**
الطلب	**150**	**180**	**220**	**550**

الخلية(1،1) شغلها يؤدي إلى تخفيض تكاليف النقل

أقل قيمة في الخلايا التي تحمل إشارة (–) يتم إضافتها إلى الخلايا التي تحمل إشارة (+) وإنقاصها من قيم الخلايا التي تحمل إشارة (–).

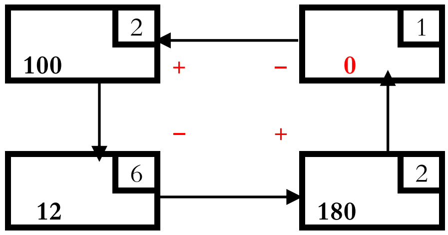
$$\mathbf{Min(100,120)= \ \ 100}$$

مسار الحلقة $x_{11} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{12}$



0+100=100 100-
100=0

120-100=20
80+100=180



–تعديل الجدول:

تعديل الجدول

	D1	D2	D3	العرض
S1	2 100	1 0	8 /	100
S2	7 30	4 /	3 220	250
S3	6 20	2 180	4 /	200
الطلب	150	180	220	550

التكلفة الإجمالية:

$$CT = 2(100)+7(30)+3(220)+6(20)+2(180)=1550$$

–التكلفة الإجمالية للنقل 1550 أقل من السابق (1850)

– إعادة الخطوات السابقة (اختبار أمثلية الحل الجديد)

– عدد الخلايا المشغولة (المملوءة) = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1

5=1- 3+3

- حساب الرقم القياسي بالنسبة للخلايا المشغولة لكل صف وعمود:

طريقة حساب الرقم القياسي لكل صف(U_i) ولكل عمود(V_j)

الخلية	$U_i + V_i = C_{ij}$	(U_i) ، (V_j)
الخلية(1،1)	$U_1+V_1=2$ $0+V_1=2$	$V_1=2$
الخلية(2،1)	$U_2+V_1=7$ $U_2+2=7$	$U_2=5$
الخلية(2،3)	$U_2+V_3=3$ $5+V_3=3$	$V_3=-2$
الخلية(3،1)	$U_3+V_1=6$ $U_3+2=6$	$U_3=4$
الخلية(3،2)	$U_3+V_2=2$ $4+ V_2=2$	$V_2=-2$

	D1	D2	D3	العرض	
S1	2 100	1 0	8 /	100	$U_1=0$
S2	7 30	4 /	3 220	250	$U_2=5$
S3	6 20	2 180	4 /	200	$U_3=4$
الطلب	150	180	220	550	
	$V_1=2$	$V_2=-2$	$V_3=-2$		

- تقييم الخلايا الفارغة:

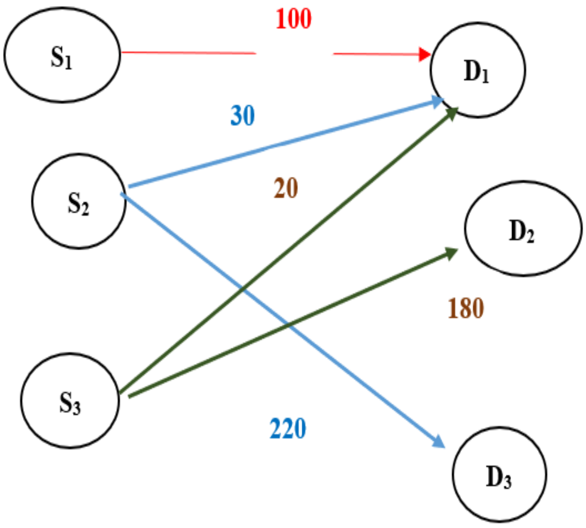
بالنسبة للخلايا الفارغة يتم حسابها وفقا للمعادلة: $\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

تقييم الخلايا الفارغة

الخلية الفارغة	U_i، V_j	*مسار الخلية*	صافي التغير في التكلفة $\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$
الخلية(1،2)	$U_1= 0$ $v_2=-2$	/	1-0-(-2)=1+2=3
الخلية(1،3)	$U_1= 0$ $v_3=-2$	/	8-0-(-2)=10
الخلية(2،2)	$U_2=5$ $v_2=-2$	/	4-5-(-2)=6-5=1
الخلية(3،3)	$U_3= 4$ $v_3=-2$	/	4-4-(-2)=2

بما أن التكاليف المباشرة لجميع الخلايا الفارغة موجبة فإن الجدول السابق يعطي خطة النقل المثلى وهي:

	D1	D2	D3	العرض
S1	2 100	1 0	8 /	100
S2	7 30	4 /	3 220	250
S3	6 20	2 180	4 /	200
الطلب	150	180	220	550



التكلفة الإجمالية: $CT = 2(100)+7(30)+3(220)+6(20)+2(180)= \mathbf{1550}$

ملخص خوارزمية حل مسائل النقل:

يمكن تلخيص خوارزمية حل مسائل النقل في الخطوات التالية:

1– بناء جدول الحل الأساسي الأول بحيث:

– تظهر فيه تكاليف النقل من كل منبع إلى كل مصب؛

– كميات عرض كل منبع، وكميات طلب كل مصب، بحيث يتساوى مجموع العرض مع مجموع الطلب؛

2 –إيجاد الحل الأساسي الأول، بإحدى الطرق: الزاوية الشمالية الغربية، التكاليف الدنيا أو طريقة فوجل.

– يجب أن يكون عدد الخلايا الداخلة في الحل محققا للشرط. $m+n-1$

3– نختبر الحل إذا كان أمثلا أم لا، و ذلك إما بطريقة المسار المتعرج أو طريقة التوزيع المعدل؛

– نكون أمام الحل الأمثل إذا كان كل $C'ij = Cij - Vj - Ui \geq 0$ ؛:

– إذا كان الحل غير أمثل فنقوم بتحسينه، ثم نعود من جديد للخطوة السابقة، أما إن كان أمثلا فنقوم بشرحه.

4- حل مسائلة النقل بطريقة الشبكة (شبكة النقل):

يهتم أسلوب شبكات النقل بحل كثير من المسائل الاقتصادية والتقنية منها، خاصة مسائل نقل المسافرين والبضائع أو نقل وتوزيع مختلف المواد، ومن أجل معالجة مختلف الجوانب المتعلقة بهذه المسائل نلجأ إلى استخدام تقنية الشبكات.

من بين تطبيقات نظرية شبكات النقل يمكن ذكر مسائل البحث عن المسارات ذات القيمة المثلى (Optimal value paths)، مسألة التدفق الأعظم عبر الشبكة (Maximum flow problem)، مسألة المسافر التجاري وغيرها.

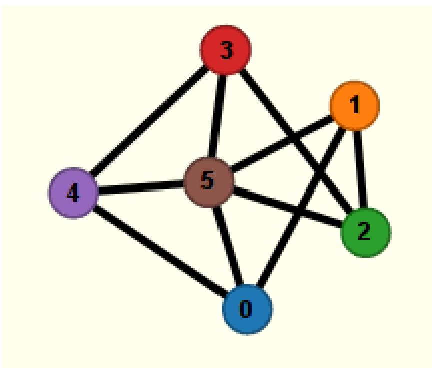
فالتطبيقات الهامة لهذه النظرية تتجلى في تمثيل وحل مسائل المرور والنقل، فالمسألة التقليدية هي تنظيم عملية نقل البضائع بين المخازن ومحلات البيع وذلك من خلال تصريف أكبر عدد من الكميات المخزنة في عدة نقاط نحو عدد كبير من محطات الاستقبال وهذا النوع من المشاكل التي تتعرض مؤسسات النقل أو الشركات الكبرى التي تود تمويل محلاتها تأخذ بعين الاعتبار المعطيات الأساسية الثلاثة التالية:

- القدرات الإنتاجية لكل وحدة؛
- حاجيات كل مخزن؛
- قدرات النقل المتاحة بين الوحدات الإنتاجية (المعامل...) والمخازن (محلات البيع...).

إن البضائع المنقولة يمكن أن تكون بضائع تنقل من مناطق مختلفة على متن بواخر طاقة نقلها محدودة إلى مناطق أخرى تكون فيها أيضا طاقة استقبالها محدودة، وقد تكون المادة المنقولة سوائل عبر أنابيب طاقة تصريفها محدودة إلى خزانات رئيسية أو مناطق استهلاكية طاقة استقبالها محدودة...إلخ.

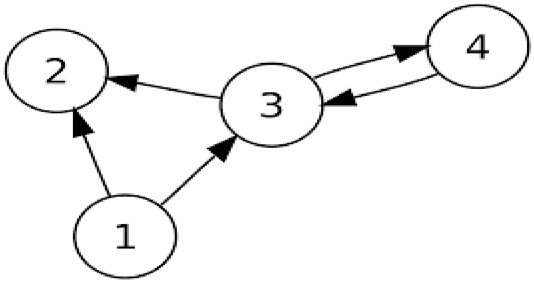
أ- مفاهيم أساسية في تكوين الشبكات:

- **الشبكة**: هو هيكل يحتوي على مجموعة من العناصر تسمى بالرؤوس ومجموعة أخرى من العناصر تسمى بالأقواس ويرمز للشبكة بالرمز U(x) تمثل الرؤوس على الرسم بنقاط والأسهم بأقواس. وتنقسم الشبكات إلى:
- **الشبكة الكاملة**: هو هيكل يكون فيه أي رأس من الرؤوس مرتبط بكل من الرؤوس الأخرى على مرة واحدة.

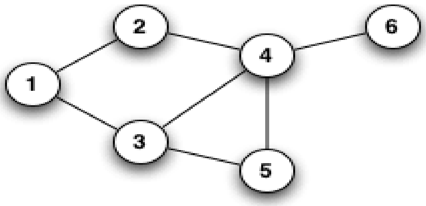


[1] خالدي فراح، محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، مدعمة بأمثلة تطبيقية محلولة، كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، جامعة العربي بن مهيدي، أم البواقي، 2020-2021، ص 142.

- **الشبكة الموجهة**: هي هيكل يتكون من رؤوس تربطها أسهم موجهة، بمعنى أن السير فيها يخضع لاتجاه الأسهم.



- **الشبكة غير الموجهة**: هي هيكل يتكون من رؤوس تربطها أسهم غير موجهة، في هذا النوع من الشبكات يسمي السهم الذي يربط أي رأسين "بالحد".



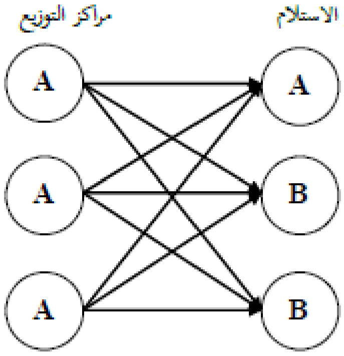
- **المسار**: في أي شبكة نسمي مساراكل سلسلة متصلة من الأسهم التي يكون فيها الطرف النهائي لكل منها هو عبارة عن الطرف الابتدائي للسهم الذي يليه، ما عدا السهم الأخير.

في مسائل النقل يمكن التمييز بين أنواع مختلفة من مسارات النقل التي تربط بين مراكز التوزيع ومراكز الاستلام وذلك على أساس الاعتبارين التاليين:

- الاعتبار الأول: عدد مراحل النقل (مسارات النقل ذات المرحلة الواحدة، مسارات النقل متعددة المراحل)،
- الاعتبار الثاني: توازن كمية العرض مع كمية الطلب، ما يسمى بالنقل المغلق والنقل المفتوح، ففي حالة النقل المغلق يكون التوازن موجودا، أما في حالة النقل المفتوح فلا يتحقق التوازن، مما يجعلنا نفكر في إدخال مركز استلام أو مركز توزيع وهمي.

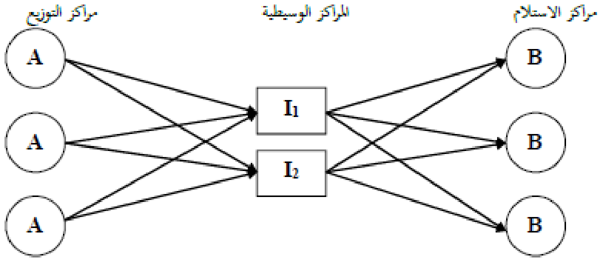
والأشكال أدناه توضح أنواع المسارات:

مسارات نقل ذات مرحلة واحدة



المصدر: فتحة بلجيلالي، رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، جامعة تيارت، 2018، ص124.

مسارات نقل ذات مراحل متعددة



المصدر: فتحة بلجيلالي، رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، جامعة تيارت، 2018، ص124.

- **الحلقة:** المسار الذي يكون فيه الطرف النهائي للسهم الأخير هو عبارة عن الطرف الابتدائي للسهم الأول، يسمى بالمسار المغلق أو الحلقة. طول أي مسار هو عبارة عن مجموع القيم التي تعبر عنها الأسهم المشكلة وتسمى عادة بالقيم المرافقة.

ولذلك توجد عدة طرق تستعمل من أجل استخراج قيمة المسار ذو القيمة الأصغر، من بينها: طريقة Ford، طريقة R.Bellman ، طريقة G.Dantzig، طريقة المصفوفات (Floyd).

ب-طرق استخراج قيمة المسار ذو القيمة الأصغر

-حالة تقليل دالة الهدف:

مثال: تريد مؤسسة النقل السريع وهي إحدى المؤسسات المختصة في نقل البضائع أن تنقل إحدى المواد من المدينة (A) إلى المدينة (L)، ولها إمكانية المرور بالمدن التالية:

(B, C, D, E, F, G, H, I, J, K)

تكلفة النقل من مدينة إلى أخرى هي كالتالي:

(AB=400), (AC=300), (AD=500), (BE=200), (BF=300), (BG=700) ,
(CE=900), (CF=1000), (CG=500), (DE=600), (DF=200), (DG=500),
(EH=800), (EI=500), (FH=400), (FI=600), (GH=500), (GI=600),
(HK=600), (HJ=400) , (IJ=600), (IK=500), (JL=400), (KL=500),

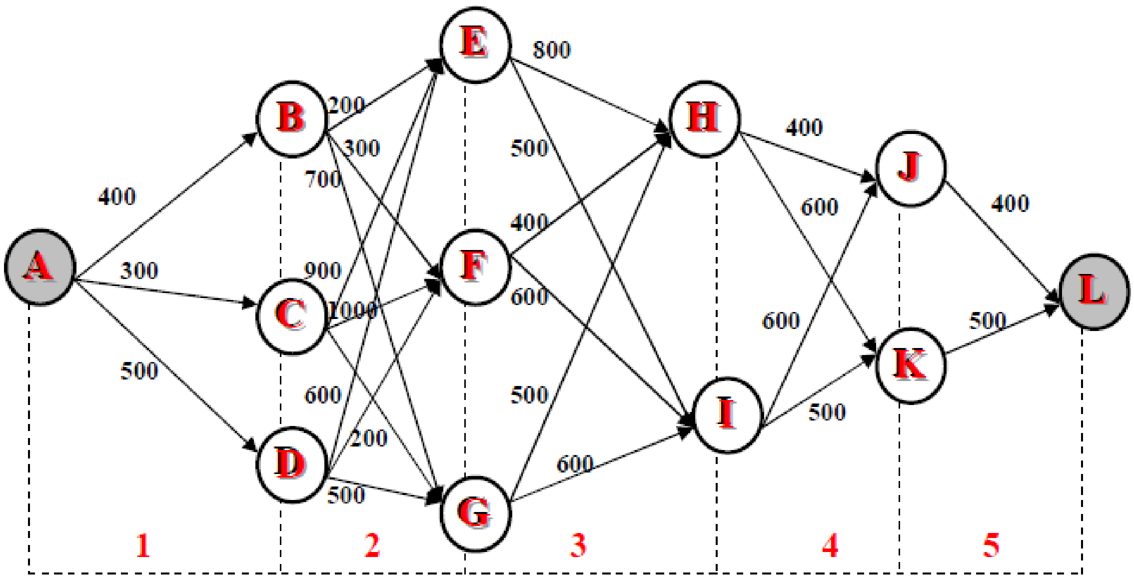
المطلوب:

تحديد الطريق الذي يسمح لهذه المؤسسة بنقل هذه المادة بأقل تكلفة؟

[1] فالتة اليمين، محاضرات ومسائل في مقياس رياضيات المؤسسة، جامعة محمد خيضر ، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، 2019-2020، ص125.

الحل: رسم الشبكة

التمثيل البياني لمشكلة النقل



– تقسيم الشبكة إلى مراحل كما هو مبين في الشكل ويكون الحل ابتداء من المرحلة الأولى(*1*) أو الأخيرة(*5*) ، لكن يستحسن أن نبدأ الحل دائما من المرحلة الأولى كما يلي:

- **المرحلة الأولى**: لدينا الاتجاهات الممكنة بالمسافات التالية:

AB=400
AC=300
AD=500

- **المرحلة الأولى ثم المرحلة الثانية**: في هذه المرحلة نبحث عن أحسن مسلك للمرحلتين معا والمسالك المحتملة هي:

– **مرورا بالمدينة (B)**:

ABE= 400+200=600
ABF= 400+300=700 **ABE=600**
ABG= 400+700=1100

حتى نهاية المرحلتين الأولى والثانية معا ومرورا بالمدينة (B) فإن المسلك (**ABE=600**) يعتبر أفضل مسلك لأنه يعطي أقل تكلفة.

– **مرورا بالمدينة (C)**:

ACE= 300+900=1200
ACF= 300+1000=1300 **ACG=800**
ACG= 300+500=800

حتى نهاية المرحلتين الأولى والثانية معا ومرورا بالمدينة (C) فإن المسلك (**ACG=800**) يحمل المؤسسة أقل تكلفة مقارنة بالمسلكين الآخرين.

– **مرورا بالمدينة (D)**:

ADE= 500+600=1100

ADF= 500+200=700 **ADF=700**

ADG= 500+500=1000

حتى نهاية المرحلتين الأولى والثانية معا ومرورا بالمدينة (D) فإن المسلك (**ADF=700**) يحمل المؤسسة أقل تكلفة مقارنة بالمسلكين الآخرين.

حتى نهاية كل من المرحلة الأولى والمرحلة الثانية معا، فإن الأمر يتطلب ضرورة المرور بالمسالك والطرق التالية:

(**ABE=600 ; ACG=800 ; ADF=700**)

- **المرحلتين (الأولى والثانية) ثم المرحلة الثالثة**: انطلاقا من نتائج المرحلتين السابقتين فإن المسالك المحتملة هي:

ABEH= 600+800=1400

ABEI= 600+500=1100 **ABEI =1100**

ACGH= 800+500=1300

ACGI= 800+600=1400

ADFH= 700+400=1100 **ADFH=1100**

ADFI= 700+600=1300

مما سبق وللمرور بالمدينة ($\mathcal{H}$) فإن القرار الأمثل يعني أنه من الضروري المرور بالمسلك الأمثل (ADFH=1100) لأنه يسمح بنقل المادة بأقل تكلفة.

أما وللمرور بالمدينة (I) فإن القرار الأمثل يعني أنه من الضروري المرور بالمسلك الأمثل (ABEI=1100) لأنه يسمح بنقل المادة بأقل تكلفة.

وبالتالي فإنه حتى نهاية المراحل الأولى والثانية والثالثة معا، فإن السياسات المثلى هي التي تعبر عن الطرق والمسالك التالية: (ADFH=1100 ؛ ABEI=1100).

- **المراحل (الأولى والثانية والثالثة) ثم المرحلة الرابعة:**

ABEIJ= 1100+600=1700

ABEIK= 1100+500=1600 **ABEIK =1600**

ADFHJ= 1100+400=1500 **ADFHJ=1500**

ADFHK= 1100+600=1700

نلاحظ أنه إذا تطلب الأمر المرور بالمدينة (J)، فإنه من الضروري المرور بالمسلك الأمثل التالي (ADFHJ=1500)، لأنه سوف يحمل المؤسسة أقل تكلفة.

أما إذا تطلب الأمر المرور بالمدينة (K)، فإنه من الضروري المرور بالمسلك الأمثل التالي (ABEIK =1600)، لأنه سوف يحمل المؤسسة أقل تكلفة.

وعليه فإنه وحتى نهاية الأربعة الأولى معا، فإن السياسات المثلى تعبر عن الطرق والمسالك التالية (ADFHJ=1500 ؛ ABEIK =1600).

- **المراحل (الأولى والثانية والثالثة والرابعة) ثم المرحلة الخامسة:**

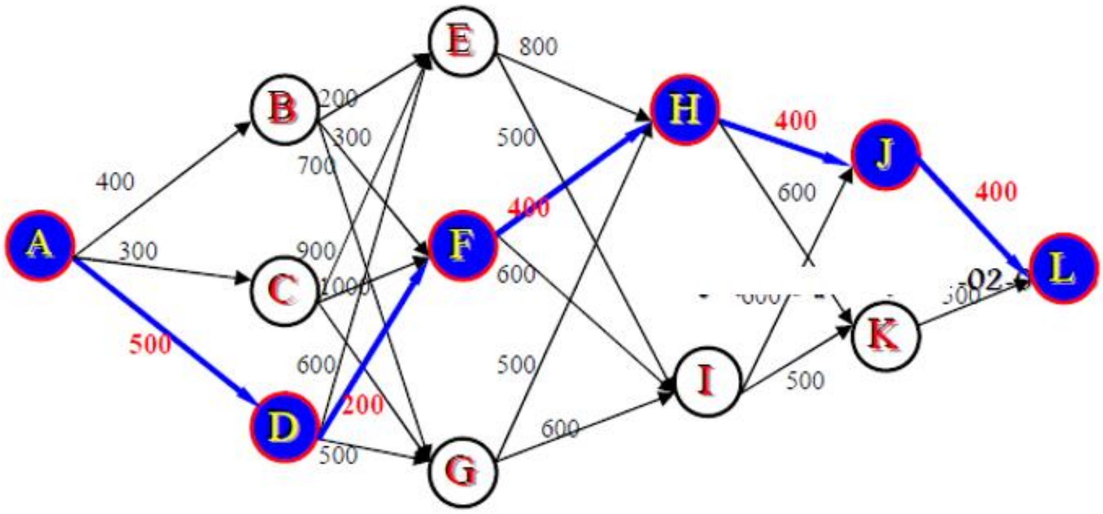
ADFHJL= 1500+400=1900

ABEIKL= 1600+500=2100 **ADFHJL =1900**

إلى غاية المدينة (L) فإن المسلك الأمثل هو (ADFHJL =1900) والذي يسمح بنقل هذه المادة من المدينة (𝒜) إلى المدينة (ℒ)، مرورا بالمدن التالية: (𝒥)، (ℋ)، (ℱ)، (𝒟)

وذلك بتكلفة إجمالية قدرها *1900* و.ن وهي أدنى تكلفة نقل، يتضح هذا المسلك في الشبكة التالية:

المسار الأمثل لمشكلة النقل



2–حالة تعظيم دالة الهدف:

مثال:

تريد مؤسسة البراق لنقل المسافرين إنجاز شبكة للنقل الحضري تسمح بنقل أكبر عدد ممكن من المسافرين من المحطة الرئيسية (𝒜) إلى المحطة النهائية (ℋ). تتوقع أن يكون عدد المسافرين من محطة إلى أخرى كما يلي:

(AB=15), (AC=18), (AD=14), (BE=20), (BF=25), (CE=23), (CF=30)
(DE=10), (DF=12), (EG=13), (FG=10), (GH=10),

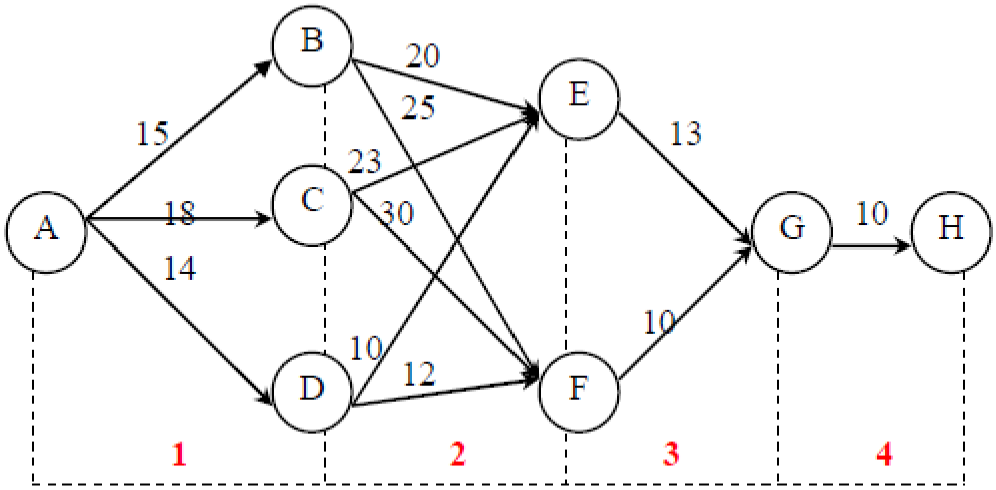
المطلوب:

البحث عن الطريق الذي يسمح لهذه المؤسسة بالحصول على أكبر الإيرادات، إذا علمت أن ثمن التذكرة الواحدة هي 20 و.ن؟

الحل:

رسم الشبكة

التمثيل البياني لشبكة نقل المسافرين



– بعد تقسيم الشبكة إلى مراحل ننطلق في دراستها ابتداء من المرحلة الأولى كما يلي:

- **المرحلة الأولى**: المسالك الممكنة:

AB=15
AC=18
AD=14

- **المرحلة الأولى ثم المرحلة الثانية**: المسالك المحتملة هي:

– **من أجل الوصول إلى المحطة (E):**

ABE= 15+20=35
ACE= 18+23=41 **ACE=41**
ADE= 14+10=24

حتى الوصول إلى المحطة (E) فإن المسلك (**ACE=41**) يعتبر أفضل مسلك لأنه يسمح بنقل أكبر عدد ممكن من المسافرين.

– **من أجل الوصول إلى المحطة (F):**

ABF= 15+25=40
ACF= 18+30=48 **ACF=48**
ADF= 14+12=26

إلى غاية الوصول إلى المحطة (F) فإن المسلك (**ACF=48**) يعتبر أفضل مسلك لأنه يسمح بنقل أكبر عدد ممكن من المسافرين.

من خلال المرحلة الأولى والثانية معا، فإنه من الضروري على المؤسسة اتباع المسالك والطرق التالية:

.(ACF=48 ؛ ACE=41)

- **المرحلتين (الأولى والثانية) ثم المرحلة الثالثة:** انطلاقا من نتائج المرحلتين السابقتين فإن المسالك المحتملة هي:

- من أجل الوصول إلى المحطة (G):

يمكن الوصول إلى المحطة (G) مرورا بإحدى المسلكين التاليين:

ACEG= 41+13=54

ACFG= 48+10=58

إن المسلك الأمثل و الذي يسمح بنقل أكبر عدد ممكن من المسافرين هو: (**ACFG= 58**).

ACE= 18+23=41 **ACE=41**

ADE= 14+10=24

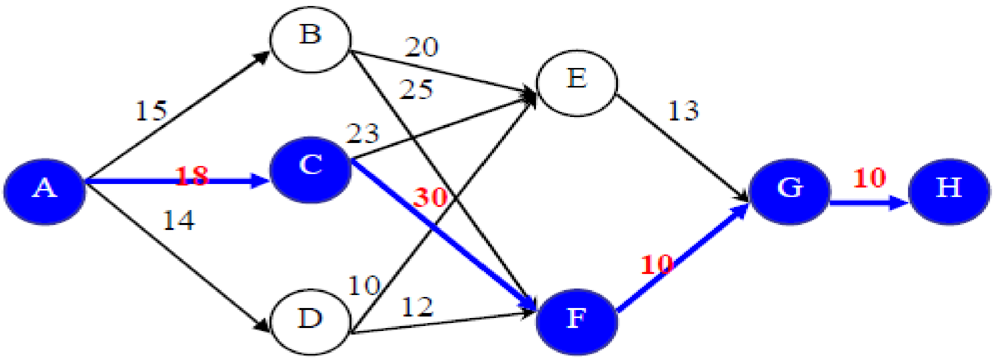
- **المرحلة (الأولى والثانية والثالثة) ثم المرحلة الرابعة:**

ACEGH= 54+10=64

ACFGH= 58+10=68 **ACFGH =68**

يبدو أنه يوجد طريق واحد أمثل بإمكانه نقل أكبر عدد من المسافرين من المحطة (A) إلى المحطة (H) وهذا المسلك هو (ACFGH =68)، والشكل التالي يسمح للمؤسسة بتحقيق أقصى إيرادات ($R= 68 \times 20=1360$)

التمثيل البياني للمسلك الأمثل لشبكة نقل المسافرين



تمرين مقترح:

تحتاج إحدى المؤسسات المختصة في الصناعات النسيجية لثلاث أنواع من الخيوط النسيجية وهي على التوالي F1 ,F2 , F3 وقد أبدت ثلاث دول استعدادها لتزويد هذه المؤسسة وهي (تركيا، الصين، الأردن) وذلك بالكميات التالية وبنفس الترتيب: 50، 40، 30 طن. أما كميات الطلب من هذه الأنواع الثلاث من الخيوط بالطن وتكلفة شراء الطن الواحد منها حسب ما هو معروض في تلك الدول معطى في الجدول التالي:

نوع الخيط	حجم الطلب	سعر الطن الواحد بالدولار		
		الأردن	تركيا	الصين
F1	50	5	1	7
F2	40	3	4	6
F3	30	6	2	3

المطلوب: ضع هذه المشكلة في صورة مشكلة النقل، ثم البحث عن الحل الذي يجعل إجمالي تكاليف الشراء اقل ما يمكن؟

حالات خاصة لنماذج النقل:

هناك الكثير من الحالات التي يمكن أن نصادفها عند صياغة وحل نماذج النقل، ويمكن تشخيصها وتحديد كيفية معالجتها كما يلي:

1–حالة عدم تساوي الطلب مع العرض

يحدث في كثير من الحالات حجم أو كمية العرض لا تساوي كمية الطلب وهنا نكون أمام حالة عدم تساوي الطلب مع العرض أي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_i \neq \sum_{j=1}^{m} b_j$$

وهناك حالتين تخص حالة عدم تساوي الطلب مع العرض وهما:

الحالة الأولى:

$$\sum_{j=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$$

وهي الحالة التي يكون فيها حجم العرض أكبر من حجم الطلب :

وبالنسبة لهذه الحالة نقوم بإضافة عمود إضافي إلى الجدول الأساسي أي جدول الحل الابتدائي، هذا العمود يسمى بالعمود الوهمي حيث أن قيمة الطلب في هذا العمود تساوي الفرق بين الكمية المعروضة والكمية المطلوبة، ويحمل هذا العمود الوهمي المضاف تكاليف وهمية أي معدومة؛

الحالة الثانية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$$

وهي الحالة التي يكون فيها حجم الطلب أكبر من حجم العرض:

بالنسبة لهذه الحالة نقوم بإضافة سطر إضافي إلى الجدول الأساسي أي جدول الحل الابتدائي، هذا السطر يسمى بالسطر الوهمي حيث أن قيمة العرض في هذا العمود تساوي الفرق بين الكمية المطلوبة والكمية المعروضة، ويحمل هذا السطر الوهمي المضاف تكاليف وهمية أي معدومة.

أمثلة تطبيقية:

مثال1: إليك جدول النقل التالي والمطلوب وضعه في الشكل القانوني:

جدول النقل الابتدائي

المناطق / الورشات	منطقة البيع1	منطقة البيع2	منطقة البيع3	العرض Σ
ورشة 1	50 X11	80 X12	90 X13	150
ورشة 2	65 X21	40 X22	45 X23	190
ورشة 3	120 X31	55 X32	60 X33	250
الطلب Σ	180	155	200	535≠590

يتبين من الجدول أعلاه أن حجم الطلب لا يساوي حجم العرض، وحجم الفارق بين العرض والطلب يساوي: 590-535= 55 ، ومنه نقوم بتعديل الجدول أعلاه للحصول على شروط الحل الابتدائي وذلك بإضافة عمود وهمي بقيمة هذا الفارق وبتكاليف معدومة كما يلي:

المناطق / الورشات	منطقة البيع1	منطقة البيع2	منطقة البيع3	منطقة البيع الوهمية	العرض Σ
ورشة 1	50 X11	80 X12	90 X13	0 X14	150
ورشة 2	65 X21	40 X22	45 X23	0 X24	190
ورشة 3	120 X31	55 X32	60 X33	0 X34	250
الطلب Σ	180	155	200	55	590=590

يتبين من الجدول أعلاه أن:

$$\sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{j=1}^{n} a_i = 590$$

ومنه شروط الجدول الحل الابتدائي محققة.

مثال2:

إليك جدول النقل التالي والمطلوب وضعه في الشكل القانوني:

جدول النقل الابتدائي

المناطق / الورشات	منطقة التوزيع1	منطقة التوزيع2	منطقة التوزيع3	منطقة التوزيع4	Σ a_iالعرض
منطقة الإنتاج1	12 X11	17 X12	14 X13	12 X14	180
منطقة الإنتاج2	10 X21	14 X22	33 X23	14 X24	150
منطقة الإنتاج3	18 X31	17 X32	16 X33	22 X34	130
Σ b_jالطلب	130	120	140	120	510≠460

يتبين من الجدول أعلاه أن حجم الطلب لا يساوي حجم العرض، أي أن الفارق بين الطلب والعرض يساوي:

510−460=50

ومنه نقوم بتعديل الجدول للحصول على شروط الحل الابتدائي وذلك بإضافة سطر وهمي بقيمة هذا الفارق وبتكاليف معدومة نتحصل على الجدول الموالي:

المناطق / الورشات	منطقة التوزيع1	منطقة التوزيع2	منطقة التوزيع3	منطقة التوزيع4	Σ a_iالعرض
منطقة الإنتاج1	12 X11	17 X12	14 X13	12 X14	180
منطقة الإنتاج2	10 X21	14 X22	33 X23	14 X24	150
منطقة الإنتاج3	18 X31	17 X32	16 X33	22 X34	130
منطقة الإنتاج الوهمية	0 X41	0 X42	0 X43	0 X44	50
Σ b_jالطلب	130	120	140	120	510=510

يتبين من الجدول أعلاه أن:

$$\sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{j=1}^{n} a_i = 510$$

ومنه شروط الجدول الحل الابتدائي محققة.

2- حالة الانحلال :

نصادف هذه الحالة عند بلوغنا للحل الأولي لمسالة النقل أي الجدول النهائي من الحل الأساسي ويكون في هذا الجدول عدد الخانات أي المربعات المملوءة اقل من $n+m-1$ ، يتم معالجة هذه الحالة بتشغيل خانة غير مملوءة بتكلفة بقيمة صغيرة جدا ε تقارب الصفر، ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

مثال:

مؤسسة تركيب الأجهزة الكهرومنزلية (الثلاجات) تقوم بتركيب هذه الأجهزة في ثلاث ورشات وتقوم تسويقها في ثلاث مراكز تجارية من الوطن: المركز التجاري وهران، المركز التجاري باب الزوار الجزائر العاصمة، والمركز التجاري سطيف، وفيما يلي جدول النقل المتعلق بهذه المسألة:

جدول النقل المتعلق بالمسألة أعلاه

المناطق / الورشات	مركز وهران	مركز الجزائر	مركز سطيف	العرض a_i Σ
ورشة 1	25 **X11**	45 **X12**	35 **X13**	150
ورشة 2	40 **X21**	55 **X22**	50 **X23**	100
ورشة 3	45 **X31**	55 **X32**	60 **X33**	350
الطلب b_j Σ	150	200	250	600

بعد إيجاد الحل الأولي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية تحصلنا على النتائج المبينة في الجدول أدناه:

تكلفة النقل باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

المناطق / الورشات	مركز وهران		مركز الجزائر		مركز سطيف		العرض a_i Σ
ورشة *1*	150	25	/	45	/	35	150
ورشة *2*	/	40	100	55	/	50	100
ورشة 3	/	45	100	55	250	60	350
الطلب b_j Σ	150		200		250		600

يتضح من الجدول أعلاه أن كل الطلب مغطى انطلاقا من العرض المتوفر، وقيمة الحل الأولي تساوي:

$$\text{Min } z = 150*25 + 100*55 + 100*55 + 250*60 = 29.750 \text{ DA}$$

كما أن عدد الخانات المملؤة يساوي 4 لا يساوي إلى n+m-1 وهو لا يحقق شرط الحل الأولي، ومنه لتفادي هذه الحالة وهي حالة الانحلال نقوم بإضافة خانة فارغة بقيمة صغيرة جدا ε تقارب الصفر كما يلي:

المناطق / الورشات	مركز وهران		مركز الجزائر		مركز سطيف		العرض a_i Σ
ورشة *1*	150	25	/	45	/	35	150
ورشة *2*	ε	40	100	55	/	50	100
ورشة 3	/	45	100	55	250	60	350
الطلب b_j Σ	150		200		250		600

يتضح من الجدول أعلاه أن كل الطلب مغطى انطلاقا من العرض المتوفر، وقيمة الحل الأولي تساوي:

$$\text{Min } z = 150*25 + \varepsilon*40 + 100*55 + 100*55 + 250*60 = 29.750 \text{ DA}$$

كما أن عدد الخانات المملؤة يساوي إلى=5 n+m-1 وهو يحقق شرط الحل الأولي.

تمارين مقترحة:

التمرين 1:

إحدى الشركات لديها ثلاث مخازن في مواقع مختلفة كما أن لديها ثلاث مراكز تسويقية، تكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع، وحجم السلع في كل مخزن والاحتياجات لكل مركز تسويقي مشار إليها في الجدول أدناه:

المخازن (yi) / المصانع (Xi)	D1	D2	D3	العرض Σ
S1	1	4	5	55
S2	5	7	3	45
S3	10	8	9	20
الطلب Σ	40	30	50	120

المطلوب:

-ما هو مجموع تكاليف النقل للسلعة من المصادر إلى المراكز باستخدام طريقة (الركن) الزاوية الشمالية الغربية؟

- أوجد الحل الأولي لمشكلة النقل السابقة باستخدام طريقة التكلفة الصغرى؟

- أوجد الحل الأولي لمشكلة النقل السابقة باستخدام طريقة فوجل؟

التمرين 2:

تدير شركة لإنتاج ألبان وحدات إنتاجية موزعة في الشرق الجزائري وذلك بطاقات إنتاجية اليومية محددة كما يلي:

- الوحدة الإنتاجية الأولى A : طاقتها الإنتاجية تقدر بـ: 30.000 لتر من الحليب.
- الوحدة الإنتاجية الثانية B : طاقتها الإنتاجية تقدر بـ: 60.000 لتر من الحليب.
- الوحدة الإنتاجية الثالثة C : طاقتها الإنتاجية تقدر بـ: 80.000 لتر من الحليب.

وتعاقدت هذه الشركة مع أربعة مراكز تسويقية في الشرق الجزائري، حيث قدرت الطلبات اليومية لهذه المراكز كما يلي:

- مراكز التسويق الأول I : طلبه قدر بـ 75.000 لتر من الحليب.
- مراكز التسويق الثانية II : طلبه قدر بـ 35.000 لتر من الحليب.
- مراكز التسويق الأول III : طلبه قدر بـ 40.000 لتر من الحليب.
- مراكز التسويق الأول IV : طلبه قدر بـ 20.000 لتر من الحليب.

وبفرض أن تكاليف النقل بين كل وحدة إنتاجية، ومركز تسويق بالنسبة لألف لتر من الحليب هي كما يلي:

المراكز الوحدات	I	II	III	IV
A	900	700	600	500
B	200	800	900	1200
C	400	300	1000	800

المطلوب:

– أوجد خطة التوزيع المثلى حيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن.

التمرين 3:

تريد مؤسسة توزيع بضاعتها من مخازنها الثلاث إلى نقاط التوزيع الثلاث بأقل تكلفة إجمالية، إذا علمت أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل مخزن إلى كل نقطة توزيع وكذا الكميات المعروضة في المخازن والكميات الممكن استقبالها في كل نقطة توزيع هي:

	توزيع1	توزيع2	توزيع3	العرض
مخزن 1	5	1	8	12
مخزن 2	2	4	0	14
مخزن 3	3	6	7	4
الطلب	9	10	11	

المطلوب:

1 – أوجد الحل الأساسي الأول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية؛

2– أوجد الحل الأمثل إنطلاقا من حل الأساس المتوصل إليه باستخدام طريقة التخطي.

المحور الخامس: مدخل إلى البرمجة غير الخطية بقيود أو بدون قيود

(Nonlinear programming with constraints or without constraints)

تمهيد

الفرق بين البرمجة الخطية وغير الخطية

مفهوم البرنامج غير الخطي

النهايات العظمى والدنيا المحلية والكلية

طرق حل البرنامج غير الخطية

- حل البرامج غير الخطية بدون قيود
- حل البرامج غير الخطية المقيدة

مدخل إلى البرمجة غير الخطية بقيود وبدون قيود

تمهيد:

البرمجة غير الخطية هي جزء من البرمجة الرياضية، التي تتمثل وظيفة غير الخطية من قبل بعض القيود أو دالة الهدف. الهدف الرئيسي من البرمجة غير الخطية هو العثور على القيمة المثلى للدالة الهدف نظرا لعدد معين من المعلمات والقيود.

تحدث البرمجة غير الخطية في الحياة اليومية في كثير من الأحيان. على سبيل المثال، زيادة غير متناسبة في كمية تكاليف إنتاج أو شراء البضائع.

البرمجة غير الخطية هي عملية حل مشكلات التحسين التي تتعلق ببعض القيود غير الخطية أو الوظائف الهدف غير الخطية. إنها تنطوي على تقليل أو تعظيم وظيفة موضوعية غير خطية تخضع لقيود منضمة، قيود خطية، قيود غير خطية، إلخ. يمكن أن تكون هذه القيود من عدم المساواة أو المساواة. بالإضافة إلى ذلك، تساعد البرمجة غير الخطية في تحليل مفاضلات التصميم، واختيار التصاميم المثلى، وحساب المسارات المثلى وتحسين المحفظة ومعايرة النموذج في تمويل الحساب.

هناك نوعان من البرمجة غير الخطية على النحو التالي:

البرمجة غير المقيدة: تتضمن البرمجة غير الخطية غير المقيدة إيجاد متجه x يمثل الحد الأدنى المحلي لوظيفة العددية غير الخطية $f(x)$.

تعد شبه-نيوتن و Nelder Mead و Trust-region بعض خوارزميات البرمجة غير الخطية الشائعة غير المقيدة.

البرمجة المقيدة: تتضمن البرمجة غير الخطية المقيدة إيجاد متجه x يقلل من الدالة غير الخطية $f(x)$ مع مراعاة واحد أو أكثر من القيود. النقاط الداخلية، البرمجة التربيعية المتسلسلة، ومنطقة الثقة تعكس بعض خوارزميات البرمجة غير المقيدة الشائعة.

1- الفرق بين البرمجة الخطية وغير الخطية:

البرمجة الخطية هي طريقة لتحقيق أفضل النتائج في نموذج رياضي تمثل متطلباته بالعلاقات الخطية في حين أن البرمجة غير الخطية هي عملية لحل مشكلة التحسين حيث تكون القيود أو الدوال الموضوعية غير خطية. وبالتالي، هذا هو الفرق الرئيسي بين البرمجة الخطية وغير الخطية.

علاوة على ذلك، تساعد البرمجة الخطية على إيجاد أفضل حل لمشكلة باستخدام قيود خطية بينما تساعد البرمجة غير الخطية على إيجاد أفضل حل لمشكلة باستخدام قيود غير خطية.

الفرق الرئيسي بين البرمجة الخطية وغير الخطية هو أن البرمجة الخطية تساعد على إيجاد أفضل حل من مجموعة من المعلمات أو المتطلبات التي لها علاقة خطية بينما تساعد البرمجة غير الخطية على إيجاد أفضل حل من مجموعة من المعلمات أو المتطلبات التي تحتوي على علاقة غير خطية.

2- مفهوم البرنامج غير الخطي:

جميع البرامج التي تم تناولها في الفصل الأول والثاني هي من النوع الخطي، بمعنى أن المتغيرات أسها مرفوع إلى الدرجة واحد، إلا أن الواقع الاقتصادي يشير إلى أن العديد من العلاقات الاقتصادية تتمثل في معادلات غير خطية، وبالتالي تتطلب معالجات خاصة. ويتم اعتبار البرنامج بأنه برنامج غير خطي إذا تم صياغة علاقة أو أكثر من علاقة في صورة غير خطية.

وبمعنى آخر، فإنه في العلاقات غير الخطية تحمل جميع أو بعض متغيرات العلاقة الاقتصادية أسا أعلى من الدرجة الأولى. والعلاقات غير الخطية لا تشكل خطا مستقيما وتتنوع صيغ الدوال غير الخطية. ونذكر منها:

-الدالة التربيعيةQuadratic Function :

ويعبر عنها بالصيغة التالية :

$$f(X)=aX^2+bX+c$$

- الدالة التكعيبية : Cubic function

ويعبر عنها بالصيغة التالية:

$$f(X)=aX^3+bX^2+cX+d$$

- الدالة اللوغاريتمية Logarithmic function:

يُمكن كتابتها بالصيغة التالية:

$$f(X)=\log_b x$$

-الدالة الأسية Exponential function :

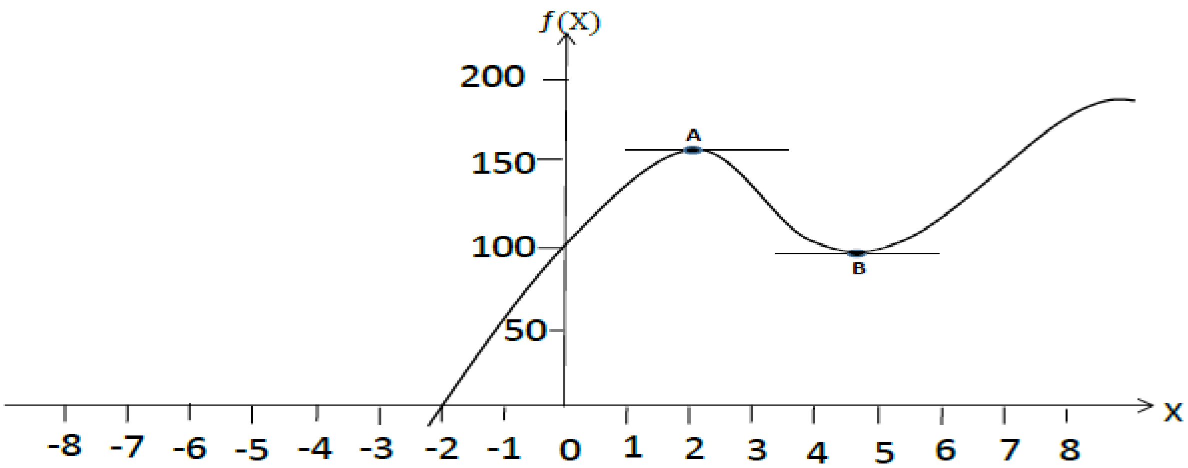
يمكن كتابتها بالصيغة التالية:

$$f(X)=b^x$$

وقبل التطرق إلى أساليب حل البرامج غير الخطية، سنتطرق إلى مفهوم النهايات العظمى والدنيا والتي يقوم عليها حل هذه البرامج.

3- النهايات العظمى والدنيا المحلية والكلية[1]:

لنفترض الدالة f(X) والتمثيل البياني لها كما يلي:



يوضح الشكل أعلاه أن الدالة تصل إلى نهاية عظمى محلية (أو نسبية) Local maximum عند النقطةA ، بمعنى أن الدالة تكون قيمتها عند هذه النقطة أكبر من قيمتها عند أية نقطة مجاورة للنقطة .A وأطلق عليها نهاية عظمى محلية أو نسبية لأن الدالة يمكن أن تأخذ قيمة أعلى عند نقاط أخرى، وبالتالي فهي ليست نهاية مطلقة أو كلية. وعند النهاية العظمى المحلية يكون رسم الدالة

[1] ريغي هشام، محاضرات وتطبيقات في مادة رياضيات المؤسسة، معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، المركز الجامعي عبد الحفيظ بوصوف ميلة، 2020-2021، ص .114

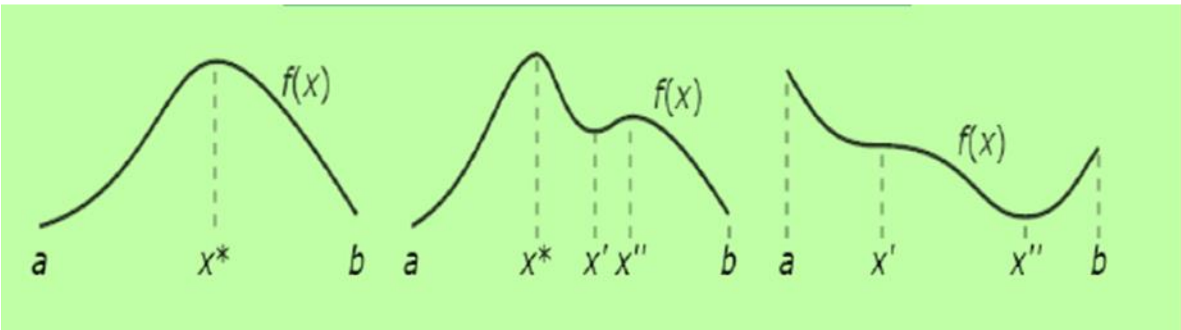
متنازلا على الجانبين، وهو ما يلاحظ عند النقطة A حيث تتنازل الدالة على جانبي النقطة. وعند هذه النقطة تكون الدالة مستقرة Stationary، أي أنها لا متزايدة ولا متناقصة، ويكون المماس للدالة عند هذه النقطة أفقيا، ما يعني أن ميله يساوي الصفر.

وتصل الدالة إلى نهاية دنيا محلية (أو نسبية) Local minimumعند النقطة B ، بمعنى أن الدالة تكون قيمتها عند هذه النقطة أصغر من قيمتها عند أية نقطة مجاورة للنقطة . B وأطلق عليها نهاية دنيا محلية أو نسبية لأن الدالة يمكن أن تأخذ قيمة أدنى عند نقاط أخرى، وبالتالي فهي ليست نهاية مطلقة أو كلية. وعند النهاية الدنيا المحلية تتصاعد الدالة على جانبي النهاية، وهو ما يمكن ملاحظته عند النقطة . B وعند هذه النقطة تكون الدالة مستقرة، أي أنها لا متزايدة ولا متناقصة، ويكون المماس للدالة عند هذه النقطة أفقيا، ما يعني أن ميله يساوي الصفر.

ويطلق على القيم التي تحقق نهاية عظمى أو دنيا للدالة بالنقاط الحرجة Critical points أو Stationary points ويُمكن أن تكون هناك قيم أعلى من القيم التي تحقق نهاية عظمى للدالة أو قيم أدنى من القيم التي تحقق نهاية دنيا للدالة إلا أ نها لا تعد نقاط حرجة لأن الميل عند تلك القيم لا يساوي الصفر. ويمكن أن تمثل النقاط الحرجة نقاط إنعطاف حيث تقطع الدالة خط المماس وتتحول من محدبة Convex إلى مقعرة Concave أو العكس.

ولفهم أكبر لمعنى النهايات العظمى (الدنيا) المحلية أو الكلية ننظر إلى الأشكال التالية:

أشكال تو ضح بعض المفاهيم حول النقاط الحرجة والنهايات



- الشكل الأيسر يوضّح وجود نقطة حرجة واحدة X^* وهي نهاية عظمى كلية للدالة $f(X)$ ؛
- الشكل الأوسط يحتوي على ثلاثة نقاط حرجة وهي . $X^*, X`, X``$ النقطة الحرجة $X^*$ هي نهاية عظمى كلية، النقطة الحرجة $X`$ هي نهاية دنيا محلية والنقطة الحرجة $X``$ هي نهاية عظمى محلية؛
- الشكل الأيمن يتضمن نقطتين حرجتين . $X`, X``$ النقطة الحرجة $X`$ هي نقطة إنعطاف، أما النقطة الحرجة$X``$ فهي نهاية دنيا كلية.

ولنقاط الإنعطاف أهمية قليلة في مجال الاقتصاد، أما النهايات الصغرى والعظمى فهي مهمة جدا.

وفيما يخص النهايات العظمى (الدنيا) الكلية فهي تعتبر نهايات عظمى (دنيا) محلية. ويتم الإشارة أحيانا إلى النهايات العظمى (الدنيا) المحلية كنهايات عظمى (دنيا)كلية للتأكيد على أنها ليست فقط نهايات عظمى (دنيا) محلية.

وفي النظرية الاقتصادية تقريبا يتم دائما الاهتمام بالنهايات العظمى الكلية وليس مجرد النهايات العظمى المحلية.

وعند حل البرامج غير الخطية سنهتم فقط بكيفية إيجاد نقاط الحلول المثلى والتي هي نهايات محلية، بدون التطرق إلى طرق التحقق من كونها أيضاً نهايات كلية.

مثال (تحديد النقاط الحرجة):[1]

لتكن الدالة f، حيث $f : R^2 \rightarrow R$ معرفة كما يلي:

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$$

حدد النقاط الحرجة ل f وقيم f(x,y) عند هذه النقاط.

الحل:

$$\frac{\delta f}{\delta X}(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \ldots\ldots (1) \qquad y = x^2 \ldots\ldots (3)$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = 3y^2 - 3y = 0 \ldots\ldots (2)$$

نعوض (3) في (2) فينتج: (x =1) و (x=0).

$$X=0 \Rightarrow y=0 \ ; (0,0)$$

$$X=1 \Rightarrow y=1 \ ; (1,1)$$

$$f(0,0) = 4 \ , \ f(1,1) = 3$$

4- طرق حل البرنامج غير الخطية:[2]

تتعدد الطرق المستخدمة في إيجاد الحل الأمثل للبرامج غير الخطية حسب الحالات التالية:

-عدد متغيرات البرنامج غير الخطي؛

-وجود أو عدم وجود قيود؛

-وجود قيد أو أكثر في شكل متباينة.

4-1 حل البرامج غير الخطية بدون قيود:

البرامج غير الخطية التي تحتوي على متغيرة واحدة:

لنفترض الدالة التالية:

$$y = f(x)$$

حتى تكون الدالة عند نهايتها العظمى أو الدنيا ينبغي توفر شرطين:

-**الشرط الضروري**: إن الشرط الضروري للحصول على نهاية عظمى أو نهاية دنيا للدالة هو أن تكون مشتقة هذه الأخيرة تساوي الصفر، أي:

$$\frac{\delta Y}{\delta X} = 0$$

---

[1] محمد بداوي، بحوث العمليات، دار الضحى للنشر والاشهار، الجلفة الجزائر، الطبعة الأولى، 2022، ص ص 322-323.

[2] ريغي هشام، مرجع سابق، ص ص 126-127.

وهذا الشرط لا يوضح ما إذا كانت الدالة عند نهايتها العظمى أو الدنيا بل يوضح فقط وجود نقاط حرجة، وبالتالي لابد من توفر الشرط الثاني.

-**الشرط الكافي**: وهذا الشرط يسمح بمعرفة صنف النقاط الحرجة ما إذا كانت الدالة عند هذه القيم عند نهايتها العظمى أو الدنيا.

ويتحقق هذا الشرط عندما تكون قيمة المشتقة الثانية للدالة عند النقاط الحرجة كما يلي:

الحالة الأولى: قيمة المشتقة الثانية سالبة، أي:

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} < 0$$

وهي تعني وجود **قيمة عظمى**. والإشارة السالبة للمشتقة الثانية تعني أن منحنى الدالة يتجه نحو التناقص بعد أن وصل إلى النهاية العظمى؛

الحالة الثانية: قيمة المشتقة الثانية موجبة، أي:

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} > 0$$

وهي تعني وجود **قيمة دنيا**. والإشارة الموجبة للمشتقة الثانية تعني أن المنحنى يتجه نحو التزايد بعد أن وصل إلى النهاية الدنيا؛

الحالة الثالثة: قيمة المشتقة الثانية معدومة، أي:

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = 0$$

وهي تعني أن النقطة الحرجة هي **نقطة إنعطاف**، أو يمكن أن تكون نهاية عظمى أو نهاية دنيا وتحتاج إلى معلومات أخرى لتمييزها.

ويمكن لإشارات المشتقات من درجة أعلى أن تحدد ما إذا كانت النقاط الحرجة هي نهاية عظمى أو نهاية دنيا. وعمليا، فإن هذه الشروط نادرا ما تكون مفيدة.

ويمكن تلخيص شروط النهايات العظمى والنهايات الدنيا للدوال ذات المتغيرة الواحدة كما يلي:

نهاية الدالة / الشروط	دنيا	عظمى
الضروري	$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = 0$	$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = 0$
الكافي	$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} > 0$	$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} < 0$

مثال1:

لتكن الدالة f ، حيث $f : R^2 \to R$ معرفة كما يلي: $f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$

حدد النقاط الحرجة لـ f وقيم $f(x,y)$ عند هذه النقاط.

حل المثال:

$$f(x,y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$$

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \ldots\ldots (1) \Rightarrow y = x^2 \ldots. (2)$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = 3y^2 - 3x = 0 \ldots\ldots (3)$$

نعوض (2) في (3) فينتج: $(x=0) \vee (x=1)$

$X=0 \Rightarrow y=0 \; ; (0,0)$

$X=1 \Rightarrow y=1 \; ; (1,1)$

$f(0,0)=4 \;,\; f(1,1)=3$

مثال2:

ليكن لديك دالة الربح الكلي التالية:

$$\Pi = \frac{1}{3}x^3 - 3.5\,x^2 + 10x + 35$$

المطلوب: حدد حجم الإنتاج من X الذي يحقق أعظم ربح كلي، وما هي قيمة هذا الربح عند هذا الحجم من الإنتاج؟

الحل:

-الشرط الضروري: نجد المشتقة الأولى ونساويها بالصفر:

$$\frac{\delta \Pi}{\delta x} = x^2 - 7x + 10 = 0$$

نقوم بحل المعادلة السابقة، وهي معادلة تربيعية، بطريقة المميز كما يلي:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(10) = 49 - 40 = 9$$

بما أن $\Delta > 0$ فالمعادلة التربيعية لها جذران حقيقيان غير متساويان يُمكن إيجادهما وفقا للقانون التالي:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$= \frac{(7) \pm 3}{2}$$

هناك نقطتين حرجتين هما: $X_1 = 2$ و $X_2 = 5$

ملاحظة: اقتصاديا ترفض القيم السالبة إن وجدت.

-الشرط الكافي:

نجد المشتقة الثانية كما يلي:

$$\frac{\delta^2 \pi}{\delta x^2} = 2x - 7$$

نقوم بتعويض القيم الحرجة في معادلة المشتقة الثانية كما يلي:

- عندما $x=2$:

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta x^2} = 2(2) - 7 = -3 \; < 0$$

- عندما x=5 :

$$\frac{\delta^2\pi}{\delta x^2} = 2(5) - 7 = 3 \; > 0$$

يلاحظ أن قيمة المشتقة الثانية عند X=2 أقل من الصفر، وهذا يعني أن هناك نهاية عظمى عند هذه النقطة الحرجة. قيمة الربح الكلي القصوى هي:

$$\text{Max } \Pi = \frac{1}{3}(2)^3 - 3.5(2)^2 + 10(2) + 35$$

$$= \frac{131}{3} \text{ وحدة نقدية}$$

وإذا افترضنا أن الدالة السابقة هي دالة التكلفة الكلية، وكان المطلوب هو إيجاد حجم الإنتاج الذي يقلل إلى أدنى حد التكلفة الكلية، ففي هذه الحالة فإن x=5 تحقق هذا الحل لأن قيمة المشتقة الثانية عند هذه النقطة الحرجة موجبة، وقيمة التكلفة الكلية ستكون:

$$\text{Min c} = \frac{1}{3}(5)^3 - 3.5(5)^2 + 10(5) + 35 = \frac{235}{6} \text{ (وحدة نقدية)}$$

مثال 3:

بعد دراسات معمقة توصلت إحدى المؤسسات الصناعية إلى صياغة دالتي الإيراد الكلي والتكلفة الكلية الخاصة بمنتجها كما يلي:

$$TR = -6X^2 + 1480X$$

$$TC = 40X + 1500$$

حيث:

TR: الإيراد الكلي

TC: التكلفة الكلية

X: المنتج

المطلوب:

-أوجد دالة الربح الكلي؟

-حدد مستوى الإنتاج الذي يعظم الربح الكلي، وما هي قيمة هذا الربح عند هذا المستوى من الإنتاج؟

الحل:

-إيجاد دالة الربح الكلي:

بما أن الربح الكلي يساوي الإيراد الكلي ناقص التكلفة الكلية، إذا:

$$\pi = TR - TC = (-6X^2 + 1480X) - (40X + 1500) = -6X^2 + 1440X - 1500$$

-تحديد مستوى الإنتاج الذي يعظم قيمة الربح الكلي وقيمة هذا الربح عند هذا المستوى من الإنتاج:

لدينا:

$$\pi = -6X^2+1440X-1500$$

-الشرط الضروري: نجد المشتقة الأولى ونساويها بالصفر:

$$\frac{\delta \Pi}{\delta x} = -12x + 1440 = 0$$

$$x = \frac{1440}{12} = 120$$

-الشرط الكافي:

نجد المشتقة الثانية كما يلي:

$$\frac{\delta^2 \pi}{\delta x^2} = -12 < 0$$

بما أن قيمة المشتقة الثانية سالبة فهذا يعني وجود نهاية عظمى لدالة الربح الكلي عند حجم إنتاج 120 وحدة، وتبلغ قيمة هذا الربح عند هذا الحجم من الإنتاج:

$$Max\ \pi = -6\,(120)^2+1440\,(120)-1500 = \mathbf{84900}$$ نقدية وحدة

البرامج غير الخطية التي تحتوي على متغيرتين:

لا ترتبط الدوال الاقتصادية بمتغيرة واحدة فقط بل الكثير منها يرتبط بمتغيرتين أو أكثر. فعلى سبيل المثال نجد أن عملية إنتاج منتوج ما يتطلب العديد من عناصر الإنتاج مثل العمل ورأس المال. وسنعالج في هذا الجزء البرامج غير الخطية التي تحتوي على متغيرتين.

لنفترض الدالة التالية:

$$y = f(x_1, x_2)$$

حتى تكون الدالة عند نهايتها العظمى أو الدنيا ينبغي توفر شرطين:

-الشرط الضروري : المشتقات الجزئية الأولى للدالة ينبغي أن تساوي الصفر، أي:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta Y}{\delta X_1} = 0 \\ \dfrac{\delta Y}{\delta X_2} = 0 \end{cases}$$

وهذا الشرط لا يوضح ما إذا كانت الدالة عند نهايتها العظمى أو الدنيا بل يوضح فقط وجود نقاط حرجة، وبالتالي لابد من توفر الشرط الثاني.

-الشرط الكافي : وهو أن تكون قيم المشتقات الجزئية الثانية عند النقاط الحرجة كما يلي:

$$\frac{\delta^2 y}{\delta {x_1}^2} < 0$$

و الدالة عند النهاية عظمى

$$\frac{\delta^2 y}{\delta {x_2}^2} < 0$$

$$\frac{\delta^2 y}{\delta {x_1}^2} > 0$$

و الدالة عند النهاية دنيا

$$\frac{\delta^2 y}{\delta {x_2}^2} > 0$$

وهناك شرط ثالث في كلا الحالتين وهو أن جداء المشتقة الجزئية الأولى والمشتقة الجزئية الثانية ينبغي أن يكون أكبر من مربع المشتقة الجزئية الثانية المتقاطعة، أي:

$$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2}\right)^2$$

أي بمعنى آخر:

$$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right) - \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2}\right)^2 > 0$$

لأن عدم توفر هذا الشرط يضعنا أمام الحالتين التاليتين:

-الدالة عند نقطة سرج Saddle point عندما يتوافر الشرط التالي عند القيم الحرجة للمتغيرتين:

$$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right) < \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2}\right)^2$$

وكانت $\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}$ و $\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}$ لهما إشارتان مختلفتان.

-الدالة عند نقطة إنعطاف Inflection point عندما يتوافر الشرط التالي عند القيم الحرجة للمتغيرتين:

$$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2}\right)^2$$

وكانت $\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}$ و $\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}$ لهما نفس الإشارة.

$$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right) = \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2}\right)^2$$

فإن الفحص غير قطعيinconclusive

ويمكن تلخيص طريقة إيجاد وتصنيف النقاط الحرجة للدالة ذات المتغيرتين كما يلي:

الشرط	نهاية دنيا	نهاية عظمى	نقطة سرج	نقطة انعطاف
الضروري	$\frac{\delta Y}{\delta X_1}=0$ $\frac{\delta Y}{\delta X_2}=0$	$\frac{\delta Y}{\delta X_1}=0$ $\frac{\delta Y}{\delta X_2}=0$	$\frac{\delta Y}{\delta X_1}=0$ $\frac{\delta Y}{\delta X_2}=0$	$\frac{\delta Y}{\delta X_1}=0$ $\frac{\delta Y}{\delta X_2}=0$
الكافي	$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)>0, \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right)>0$	$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)<0,$ $\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right)<0$	$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)>0, \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right)<0$ أو $\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)<0, \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right)>0$	$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)>0, \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right)>0$ أو $\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)<0, \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right)<0$
الثالث	$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2}\right)^2$	$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2}\right)^2$	$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right) < \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2}\right)^2$	$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right) < \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2}\right)^2$

مثال 3:

ليكن لديك دالة التكلفة الكلية التالية:

$$C=5X_1^2+2X_2^2-20X_1-12X_2+100$$

المطلوب:

أوجد حجم الإنتاج التي يحقق أدنى تكلفة كلية ممكنة، وما هي قيمة هذه التكلفة عند هذا الحجم من الإنتاج؟

الحل:

-الشرط الأول: إيجاد القيم الحرجة:

$$\delta C/\delta X_1= 10X_1-20=0 \Rightarrow X_1=20/10= \mathbf{2}$$
$$\delta C/\delta X_2= 4X_2-12=0 \Rightarrow X_2=12/4= \mathbf{3}$$

-الشرط الثاني: إيجاد المشتقات الجزئية الثانية:

$$\delta^2 C/\delta X_1^2= \mathbf{10>0}$$

$$\delta^2 C/\delta X_2^2= 4>0$$

وبما أن المشتقتين الجزئيتين موجبتين فإن دالة التكلفة لها نهاية دنيا عند النقاط الحرجة, $X_1=2$ $X_2=3$ نقوم بإجراء الفحص الثالث للتأكد من عدم وجود نقطة انعطاف.

$$\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2}\right)\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2}\right) > \left(\frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2}\right)^2$$
$$(10)(4)> (0)2$$

$$40 > 0$$

والنتيجة تعني عدم وجود نقطة انعطاف. إذا تتحقق أدنى تكلفة كلية عند مستويات الإنتاج التالية:

$$X_1=2, \qquad X_2=3$$

وقيمة أدنى تكلفة هي:

$$Min\ (Z)=5(2)2+2(3)2-20(2)-12(3)+100=\mathbf{62}$$

$$\text{Min (z)} = 62 \text{ وحدة نقدية}$$

4-2 حل البرامج غير الخطية المقيدة: Constrained optimization

تعتبر الدوال غير الخطية التي تم تناولها سابقا دوالا حرة لأنها لا ترتبط بقيود، وفي هذه الحالة يمكن لمتغيرات هذه الدوال أن تأخذ أية قيمة، إلا أن هذه الحالة غير واقعية، فالمنشآت التي ترغب في تخفيض تكاليفها أو تعظيم أرباحها عليها أن تأخذ بعين الاعتبار العديد من العناصر مثل حجم الطلب على منتجاتها، محدودية الموارد مثل المواد الأولية،...الخ، وهي عناصر تمثل قيودا على دوال الهدف.

ويأخذ البرنامج غير الخطي المقيد الشكل التالي:

$$\text{Max } z \text{ (Min } z) = f(x_1, \ldots\ldots x_n)$$

$$\textbf{S/C} \quad \begin{cases} g_1(x_1,\ldots\ldots x_n) = b_1 \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ g_m(x_1,\ldots\ldots x_n) = b_m \\ h_1(x_1,\ldots\ldots x_n) \leq k_1 \\ \quad \vdots \\ h_s(x_1,\ldots\ldots x_n) \leq k_s \end{cases}$$

ويتم حل البرامج غير الخطية المقيدة باستخدام طريقة التعويض، طريقة مضاعف لاغرانج وطريقة كروش-كوهن-تاكر في حالة وجود متباينات.

(نكتفي بدراسة الطريقتين: طريقة التعويض وطريقة مضاعف لاغرانج)

أ-طريقة التعويض:

لنفترض برنامج غير خطي ذو متغيرتين يتضمن قيد واحد: يتم تطبيق طريقة التعويض باتباع الخطوات التالية:

- إستخدام دالة القيد للتعبير عن متغيرة بالنسبة للمتغيرة الأخرى؛
- إحلال التعبير السابق في دالة الهدف؛
- إيجاد النقاط الحرجة لدالة الهدف التي تحتوي على متغيرة واحدة (يصبح لدينا برنامج خطي غير مقيد)

مثال4:

لنفترض دالة الإنتاج التالية لمؤسسة ما:

$$Q=X_1-X_2^2+8X_2$$

حيث تمثل كل من X_1 و X_2 عاملي إنتاج.

وأسعارهما هما (وحدة نقدية):

$$PX_1=1 \qquad PX_2=2$$

تلقت المؤسسة طلبية من أحد الزبائن لشراء 20 وحدة من المنتوجQ ، مع العلم أن المؤسسة لا تملك مخزن ملائم لتخزين هذا النوع من المنتوج.

المطلوب: أوجد الكميات اللازمة من عاملي الإنتاج لتلبية طلبية الزبون بحيث تتحمل المؤسسة أقل تكلفة كلية؟

الحل:

بما أن المؤسسة لا تملك مخزن ملائم لتخزين المنتوج Q ، فهذا يعني أن عليها أن تنتج بالضبط ما يطلبه الزبون ،وبالتالي فإن القيد يكتب على شكل معادلة. إذا يُكتب البرنامج غير الخطي كما يلي:

$$Min\ C=X_1+2X_2$$

$$\text{S/C} \Rightarrow X_1-X_2^2+8X_2=20$$

نعيد كتابة القيد بالتعبير عن متغيرة بدلالة متغيرة أخرى، وكما يظهر من القيد فإن التعبير الأسهل هو كتابة X_1 بدلالة X_2 كما يلي:

$$X_1=20+X_2^2-8X_2$$

يتم إحلال التعبير السابق في دالة الهدف كما يلي:

$$Min\ C= 20+X_2^2-8X_2+2X_2 \Rightarrow Min\ Z= 20+X_2^2-6X_2$$

بحث عن النقاط الحرجة كما يلي:

$$\frac{\Delta c}{\delta X_2} = 2x_2 - 6 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$$

وبتعويض قيمة X_2 في دالة القيد نتحصل على قيمة X_1 كما يلي:

$$X_1= 20+(3)^2 - 8(3) = 5$$

المشتقة الثانية:

$$\left(\frac{\delta^2 c}{\delta x_2^2}\right) = 2 > 0$$

وبما أن إشارة المشتقة الثانية موجبة، فإن الدالة تصل إلى نهاية دنيا عند. $X_1=5,\ \ X_2=3$ وقيمة أدنى تكلفة كلية هي:

$$\text{Min c} = 5 + 2(3) = 11 \ \text{وحدة نقدية}$$

ب– طريقة مضاعف لاغرانج: Method of lagrange multiplier

تعتبر المرحلة الأولى من طريقة التعويض (التعبير عن متغيرة بمتغيرة أخرى) أصعب مرحلة، وهو ما لم يتم ملاحظته في المثال أعلاه. ففي حالة كون جميع متغيرات القيد من درجات أعلى من الواحد سيصعب التعبير عن متغيرة بمتغيرة أخرى، وأيضا ستصعب عملية التعويض في دالة الهدف، وخاصة إذا كانت هذه الأخيرة بدورها غير خطية. كذلك تظهر الصعوبة في تطبيق طريقة التعويض عندما يتضمن البرنامج غير الخطي أكثر من قيد، أو يتكون من العديد من المتغيرات. ولمعالجة مثل هذه الصعوبات يتم إستخدام طريقة مضاعف لاغرانج.

مضاعف لاغرانج يرمز له بـ (λ): وهو عدد حقيقي، ونجزم بأنه إذا كانت (x_0,y_0) نقطة حدية للدالة f تخضع للقيد $g(x_0,y_0)$، فإن λ يكون مضمون الوجود، وبه تصبح (x_0,y_0) حلا لجملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta y}(x,y,\lambda) = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \end{cases}$$

تسمى هذه المعادلات بالشروط من الرتبة الأولى، وعادة ما توضع تحت الشكل التالي:

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x}(x,y) = \lambda \frac{\delta f}{\delta x}(x,y) \\ \frac{\delta f}{\delta y}(x,y) = \lambda \frac{\delta f}{\delta y}(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

نرمز لـ (x_0,y_0,λ_0) حل للجملة، إذا كان:

$\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$ ، فإن (x_0,y_0) نقطة حرجة للدالة f تحت القيد g، هذه النقاط تفي أو تحقق القيد.

مثال5:

لدينا دالة الإنتاج لمؤسسة تعمل في ظل ثبات الغلة، دالة كوب دوغلاس (*) لهذه المؤسسة تعطى كما يلي:

$$R(K,L) = 200.K^{1/3}.L^{2/3}$$

ومعالم الميزانية هي كمايلي:

$P_K = 170$, $P_L = 20$, $B=20000$ ونريد تعظيم الدالة $R(K,L)$ في ظل القيد:

$$20000 = 20L+170K$$

الحل:

دالة لاغرانج التي وجب تعظيمها هي كما يلي:

$$L(K,L,\lambda) = 200.K^{1/3}.L^{2/3} + \lambda(20000-20L-170K)$$

الخطوة الموالية تعيين الدرج ∇L مساوي إلى 0 شعاع.

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta L}(L,K,\lambda) = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta K}(L,K,\lambda) = 0 \\ \end{cases}$$

* دالة الإنتاج كوب – دوغلاس : هي شكل من أشكال دوال الإنتاج، نستطيع القول انه تابع رياضي اقتصادي يفسر السلوك الإنتاجي وعلاقته بعوامل الإنتاج ، و يمكن أن يستخدم في دراسة عملية الإنتاج على مستوى المؤسسة وفي دراسة عمليات الإنتاج على مستوى الاقتصاد ككل.

$$\frac{\delta f}{\delta \lambda}(L,K,\lambda)=0$$

هذا يكافئ:

$$\begin{cases} \frac{400}{3}*K^{\frac{1}{3}}*L^{\frac{1}{3}}-20L=0 \\ \frac{200}{3}*K^{\frac{2}{3}}*L^{\frac{2}{3}}-170K=0 \\ 20000-20L-170K=0 \end{cases}$$

بعد حل الجملة نجد:

$$K=\frac{2000}{51}\approx 39\ ,L=\frac{2000}{3}\approx 667,\qquad \lambda=2.593$$

هذا يعني إذا وظفت 39 وحدة نقدية و 667 ساعة عمل يعطي أقصى إيراد بـ :

$$R(667,39)=200.\,(39)^{1/3}.(667)^{2/3}=\mathbf{51777}$$

- إذن لتعظيم دالة المنفعة يجب تعظيم دالة لاغرانج ولتحقيق ذلك يجب توفر شرطين هما:

- **الشرط الازم (الضروري)**: تعيين التدريج ∇L مساوي إلى 0 شعاع بالنسبة لـ: (x,y,λ) على الترتيب.
أي المشتقات الجزئية الأولى للدالة ينبغي أن تساوي الصفر.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\frac{\delta L}{\delta x}=0} \\ \boldsymbol{\frac{\delta L}{\delta y}=0} \\ \boldsymbol{\frac{\delta L}{\delta \lambda}=0} \end{cases}$$

- **الشرط الكافي**: المحدد الهيسي موجب. إن تطبيق هذا الشرط في حالة تعدد المتغيرات يتطلب إستخدام محدد هيسي المؤطر The bordered Hessian determinant لمعرفة ما إذا كانت الدالة عند القيم الحرجة عند نهايتها العظمى أو الدنيا.ويدعى محدد هيسين بالمؤطر لكونه مؤطر بالمشتقات الأولى لقيود البرنامج غير الخطي.

إذا إفترضنا أن البرنامج غير الخطي يتكون من n متغيرة و m قيد، فالمحدد الهيسي المؤطر يكتب كما يلي:

$$|H^*| = \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_1^2} & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_1\lambda_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_1\lambda_m} & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_1 X_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_1 X_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_1 X_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_m\lambda_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_m\lambda_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_m^2} & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_m X_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_m X_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta\lambda_m X_n} \\ \frac{\delta^2 L}{\delta X_1\delta\lambda_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta X_1\delta\lambda_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta X_1\delta\lambda_m} & \frac{\delta^2 L}{\delta X_1^2} & \frac{\delta^2 L}{\delta X_1 X_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta X_1\delta X_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\delta^2 L}{\delta X_n\delta\lambda_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta X_n\delta\lambda_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta X_n\delta\lambda_m} & \frac{\delta^2 L}{\delta X_n\delta X_1} & \frac{\delta^2 L}{\delta X_n\delta X_2} & \cdots & \frac{\delta^2 L}{\delta X_n^2} \end{vmatrix}$$

إذا كان عدد المتغيرات أكبر من عدد القيود، أي $n>m$ ، يتحقق الشرط الكافي باستخدام محدد هيسين المؤطر كما يلي (بالإضافة إلى الشرط الضروري):

نهاية الدالة / الشرط	دنيا	عظمى
الضروري	$\frac{\delta L}{\delta x_1}=0\ldots\ldots\frac{\delta L}{\delta x_n}=0,$ $\frac{\delta L}{\delta\lambda_1}=0\ldots\frac{\delta L}{\delta\lambda_m}=0$	$\frac{\boldsymbol{\delta L}}{\boldsymbol{\delta x_1}}=\mathbf{0}\ldots\ldots\frac{\delta L}{\delta x_n}=0,\frac{\delta L}{\delta\lambda_1}=0\ldots\frac{\delta L}{\delta\lambda_m}=0$
الكافي	نحسب آخر n-m (عدد المتغيرات ناقص عدد القيود) محيدد رئيسي قطري، وتكون إشارة جميع هذه المحيددات هي نفسها إشارة $(-1)^m$.	نحسب آخر n-m (عدد المتغيرات ناقص عدد القيود) محيدد رئيسي قطري، وتتناوب إشارات المحيددات بين إشارة سالبة وموجبة، حيث تكون إشارة المحيدد الأول من هذه المحيددات الأخيرة هي نفسها إشارة $(-1)^{m+1}$.

مثال6:

تنتج إحدى المؤسسات ثلاثة أنواع من الآلات، التكلفة الكلية المشتركة لهذه الآلات ممثلة في الدالة التالية:

$$C=4X_1^2+2X_2^2+X_3^2-2X_1X_2+X_2X_3-30X_2-30X_3$$

تخطط المؤسسة لإنتاج ما مجموعه 100 وحدة من جميع أنواع الآلات.

المطلوب: كم عدد كل نوع من الآلات يمكن أن تنتجه المؤسسة بحيث تتحمل أقل تكلفة كلية ممكنة؟

الحل:

يُكتب البرنامج غير الخطي كما يلي:

$$\text{Min } C=4X_1^2+2X_2^2+X_3^2-2X_1X_2+X_2X_3-30X_2-30X_3$$
$$s/c \{ x_1+x_2+x_3=100$$

تشكل دالة لاغرانج كما يلي:

$$L= 4X_1^2+2X_2^2+X_3^2-2X_1X_2+X_2X_3-30X_2-30X_3+\lambda(100-x_1+x_2+x_3)$$

الشرط الضروري: نقوم بإيجاد المشتقات الجزئية الأولى للدالة L ونساويها بالصفر كما يلي:

$$\delta L/\delta X_1 = 8X_1-2X_2-\lambda=0$$
$$\delta L/\delta X_2 = 4X_2-2X_1+X_3-30-\lambda=0$$
$$\delta L/\delta X_3 = 2X_3+X_2-30-\lambda=0$$
$$\delta L/\delta\lambda = 100-X_1-X_2-X_3=0$$

بحل المعادلات نجد النقاط الحرجة التالية:

$$X_1=20,\ X_2=30,\ X_3=50,\ \lambda=100$$

الشرط الكافي: نجد محدد هيسين المؤطر:

$$|H^*|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

عدد المتغيرات $(n)=3$

عدد القيود $(m)=1$

$$n-m=2$$

وهذا يعني أنه للتحقق من صنف نهاية الدالة عند النقاط الحرجة X_1,X_2,X_3 يجب حساب المحيددين الرئيسين القطريين الأخيرين كما يلي:

$$|H_3^*|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -16<0$$

$$|H_4^*|=|H^*|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -39<0$$

ويلاحظ أن إشارة المحيددين هي نفس إشارة $(-1)^m$ ، وهذا يعني أن دالة الهدف تصل إلى نهايتها الدنيا عند النقاط الحرجة:

$$X_1=20, \quad X_2=30, \quad X_3=50$$

إذا تحقق المؤسسة أدنى تكلفة كلية بإنتاج 20 آلة من النوع الأول، 30 آلة من النوع الثاني و 50 آلة من النوع الثالث، وقيمة التكلفة الكلية عند هذا المستوى من الإنتاج هي:

$Min\ Z=\mathbf{3800}$ وحدة نقدية

تمارين مقترحة:

التمرين1:

ليكن لديك البرنامج غير الخطي التالي:

$$\text{Min } Z = \boldsymbol{X_1^2 + X_2^2}$$

$$S/C \begin{cases} \boldsymbol{X_1 + 3X_2 \geq 10} \\ \boldsymbol{X_1, X_2 \ \geq 0} \end{cases}$$

المطلوب:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج غير الخطي؟

التمرين2:

ليكن لديك دالة التكلفة لمؤسسة صناعية كما يلي:

$$C = 3X^2 - 122.5\ X + 1528.5$$

المطلوب:

أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أدنى تكلفة للمؤسسة، وما هي قيمة التكلفة الكلية عند هذا الحجم من الإنتاج؟

التمرين 3:

ليكن لديك دالة الربح التالية:

$$\Pi \ = \boldsymbol{-X_1^2 - X_2^2 + 8X_1 + 10X_2 - 20}$$

المطلوب:

أوجد حجم الإنتاج الذي يحقق أعظم ربح للمؤسسة، وما هي قيمة الربح الكلي عند هذا الحجم من الإنتاج؟

قائمة المراجع

قائمة المراجع:

أ- الكتب باللغة العربية:

- حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى 2007.
- حمودي حاج صحراوي، رياضيات المؤسسة، كمدخل إلى التقنيات الكمية، دار النشر جيطلي، برج بوعريريج، الجزائر، الطبعة الأولى، 2014.
- محمد بداوي، بحوث العمليات، دار الضحى للنشر والاشهار، الجلفة الجزائر، الطبعة الأولى، 2022.
- محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية، 2006.

ب- الدروس والمحاضرات والمجلات:

- العايب سهام، محاضرات في رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة محمد الصديق بن يحي، جيجل، 2020-2021.
- إلياس سالم، محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة محمد بوضياف، المسيلة، 2016-2017.
- حمادي خديجة، محاضرات وتمارين في مقياس رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة أكلي محند أولحاج، البويرة، 2020-2021.
- خالدي فراح، محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، مدعمة بأمثلة تطبيقية محلولة، كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، جامعة العربي بن مهيدي، أم البواقي، 2020-2021.
- ريغي هشام، محاضرات وتطبيقات في مادة رياضيات المؤسسة، معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، المركز الجامعي عبد الحفيظ بوصوف ميلة، 2020-2021.
- فاتح لقومي، رياضيات المؤسسة، محاضرات مدعمة بأمثلة محلولة باستخدام برنامج QM، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة العربي بن مهيدي، أم البواقي، بدون سنة.
- فالتة اليمين، محاضرات ومسائل في مقياس رياضيات المؤسسة، جامعة محمد خيضر، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، 2019-2020.
- فتحة بلجيلالي، رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، جامعة تيارت، 2018.

ت- الكتب باللغة الأجنبية:

- Gérald Baillargeon, programmation linéaire appliquée, outils d’optimisation et d’aide à la décision, les éditions SMG, Québec,1996.
- Salim Haddadi, programmation linéaire une approche mathématique et algorithmique, ellipses édition, 2021.