الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا في علوم التسيير عنابة

Higher School of Management Sciences Annaba

Intitulé du Polycopié

COURS D’ALGÈBRE I et II

Module : **Algèbre I et II**

Spécialité : **Sciences de gestion**

Niveau : **Première Année**

Polycopié Réalisé Par :

Dr. Yessaad Mokhtari Sabah

2023/2024

ALGÈBRE

Cours d'algèbre I et II

Par **Dr. Yessaad Mokhtari Sabah**

2023-2024

Table des matières

Engagement

Je soussigné Meme. **Yessaad Mokhtari Sabah**, Maitre de conférence classe-B-, au sein de l'école supérieure des sciences de gestion, atteste sur l'honneur que le travail intitulé : Polycopie Algèbre ‹‹ **Cours d'algèbre I et II** ›› qui est destiné aux étudiants du première année préparatoire, est le fruit de mes efforts, que ce document est personnel et cite en référence toutes les sources utilisées.

Fait pour servir et valoir ce que de droit.

Introduction

Ce polycopié est dédié aux étudiants de la première année des classes préparatoires aux grandes écoles des sciences de gestion, il peut être aussi utile à ceux de la première année LMD pour les domaines Mathématiques et Informatique, Sciences et Techniques, Sciences de la Matière et Sciences de la Nature et de la Vie. Avoir de solides bases dans ce domaine, qui est devenu un outil indispensable pour l'innovation et les nouvelles technologies, était l'objectif principal fixé lors de la rédaction de ce polycopié. En outre, les chapitres traités sont conformes au programme établi en algèbre dans les classes préparatoires aux grandes écoles des sciences de gestion.

le cours contient les notions à assimiler. Il convient d'en apprendre les définitions et les énoncés des resultats principaux. les démenstrations donnée doivent comprises ainsi que les exemples proposés tout au long du cours.

En effet, cet ouvrage comporte six chapitres,

le premier est une éléments logiques.

Dans le second chapitre, nous allons ensembles et applications.

Le troisième chapitre structure algèbrique dans le quatrième chapitre.

Nous allons ensuites traiter les nombres complexes dans le cinquième chapitre les polynômes et fractions rationnelles, et on termine par les cacules matriciels et calcul déterminant dans le dernier chapitre.

Algèbre I

(Algèbre général)

Chapitre 1

Elément de Logique mathématique

1.1 Généralités

1.1.1 Ènoncé

D■finition 1.1.1 *On appele énoncé mathématique toute phrase fabriquée a l'aide des symboles,"ayant un sens".*

Exemple 1.1.1 ‹‹ *Le carrée d'un nombre réel est un nombre négatif* ››

$$\textit{Pour tous } x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$$

1.1.2 Proposition

D■finition 1.1.2 *Une proposition (ou assertion) est une phrase (énoncé mathématique) pouvant être vrai (***V***) ou faux (***F***), pas les deux en même temps.*

Il est d'usage de noter une proposition en utilisant une lettre majuscule, par exemple, P, Q, R,...etc.

Exemple 1.1.2 .

1) ‹‹$3 \leq 2$›› *est une proposition fausse.*

2) *« 25 est un multiple de 5 » est vraie et « 19 est un multiple de 3 » est une proposition fausse.*

3) *«Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geq 0$» est une proposition vraie.*

4) *« f est une fonction paire» n'est pas une proposition.*

1.1.3 Table de vérité

D■finition 1.1.3 *Une table de vérité (tableau de vérité) est un tableau contient les valeurs d'une proposition P.*

P
V
F

La valeur de vérité $\simeq$ *(vraie ou fausse)* $= 2^n$ *(où n le nombre des propositions).*

1.2 Connecteurs logique

les connecteurs logiques permettent à partir des proposition $P, Q, ...$de crée de nouvelles propositionss dites *propositions composées* on pent déterminer la valeur de vérité à partir des valeurs de vérité des propositions $P, Q, ...$

Les cinq connecteurs logiques usuels sont « *non*», « *et*», « *ou*», « $\Longrightarrow$» et « $\Longleftrightarrow$ ».

1.2.1 Négation (*non*)

D■finition 1.2.1 *La négation de P qui est notée* $non\,(P)$, $\bar{P}$ *ou* $\neg P$ *est une proposition qui est vraie si P est fausse, et elle est fausse lorsque P est vraie.*

P	$non\,(P)$
V	F
F	V

Exemple 1.2.1 .

- *non (4 est un nombre positif) est (4 n'est pas un nombre positif).*
- $non\,(x = y)$ *est* $(x \neq y)$.
- $non\,(x \geq 0)$ *est* $(x < 0)$.

1.2.2 Conjonction (*et*)

D■finition 1.2.2 *La conjonction* $(PetQ)$ *qui est notée* $(P \wedge Q)$, *et qu'elle est vraie si et seulement si P et Q sont vraies en même temps et fausse dans tous les autres cas.*

Table de vérité :

P	Q	P *et* Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.2.2 .

- $\left(\underbrace{(1+1=3)}_{F}\ et\ \underbrace{(2+2=4)}_{V}\right)$ *est proposition fausse.*
- $\left(\underbrace{(38\ \ est\ multiple\ de\ 2)}_{V}\ et\ \underbrace{(19\ \ est\ impair)}_{V}\right)$ *est proposition vraie.*

1.2.3 Disjonction (ou)

D■finition 1.2.3 *La disjonction de* $(PouQ)$ *qui est notée* $(P \vee Q)$, *et qu'elle est vraie si au moins une proposition vraie.*

Table de vérité :

P	Q	P *ou* Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.2.3 .

- $\left(\underbrace{(1+1=3)}_{F}\ ou\ \underbrace{(2+2=4)}_{V}\right)$ *est proposition vraie.*
- $\left(\underbrace{(5\ \ est\ multiple\ de\ 2)}_{F}\ ou\ \underbrace{(5<0)}_{F}\right)$ *est proposition fausse.*

1.2.4 Implication $(\Rightarrow)$

D■finition 1.2.4 *L'implication de* P *vers* Q *on dit aussi* $(P$ *implique* $Q)$ *ou* $(si\ P\ alors\ Q)$ *qui est notée* $(P \Rightarrow Q)$, *et qu'elle* $fausse$ *si* P *est vraie et* Q *est fausse, vraie dans tous les autres cas.*

La table de vérité :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque 1.2.1 *Dans l'implication $P \Longrightarrow Q$, P s'appelle l'hypothèse et Q la conclusion.*

Exemple 1.2.4 .
1) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ *est fausse (car* $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ *).*
2) $x \in]-\infty, -4[\Rightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$ *est vraie (étudier l'inégalité).*
3) $2 = -2 \Rightarrow (-2)^2 = 4$ *est vraie.*
4) $2 + 2 = 5 \Rightarrow \sqrt{2} = 2$ *est vraie ($F \Rightarrow F$ est toujours vraie).*

1.2.5 Equivalence ($\Leftrightarrow$)

Définition 1.2.5 *L'équivalence de P et Q on dit aussi (P si et seulement si Q) qui est notée ($P \Leftrightarrow Q$) est une proposition qui est vraie si Pet Q sont vraies ou fausses simultanément L'équivalence de P.*

Tableau de vérité :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 1.2.5 .
1) *n pair* $\Leftrightarrow$ *n^2 pair*
2) *Pour x et $y \in \mathbb{R}, x \times y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$*

Théorèmme 1.2.1 .
$\cdot$ $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((nonP)$ *ou* $Q)$
$\cdot$ $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ *et* $(Q \Rightarrow P)$

Preuve. $\cdot$ $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((nonP)$ ou $Q)$

P	Q	$nonP$	$P \Rightarrow Q$	$(nonP)$ *ou* Q	$. \Leftrightarrow .$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

$\cdot\ (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow P)$	$(P \Leftrightarrow Q)$	$.\Leftrightarrow .$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	V	V

■

Proposition 1.2.1 *Soient P, Q et R trois propositions. Nous avons les équivalences vraies suivantes :*

1) $non\,(nonP) \Leftrightarrow P$
2) $(PetQ) \Leftrightarrow (QetP)$
3) $(PouQ) \Leftrightarrow (QouP)$
(donc "*et*"et "*ou*"sont commutatifs)
4) $\left.\begin{array}{l} non\,(PetQ) \Leftrightarrow (nonP)\,ou\,(nonQ) \\ non\,(PouQ) \Leftrightarrow (nonP)\,et\,(nonQ) \end{array}\right\}$ (lois de Morgan)
5) $[P\ et\ \ (Q\ ou\ R)] \Leftrightarrow [(P\ et\ Q)\ ou\ (P\ et\ R)]$.
(La conjonction "*et*"est distributive par rapport à la disjonction "*ou*")
6) $[P\ ou\ \ (Q\ et\ R)] \Leftrightarrow [(P\ ou\ Q)\ et\ (P\ ou\ R)]$.
(La disjonction "*ou*"est distributive par rapport à la conjonction "*et*")
7) $[(P \Rightarrow Q)\ \ et\ \ (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.
8) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [(nonQ) \Rightarrow (nonP)]$ (Contraposée).

Preuve. 1) $non\,(nonP) \Leftrightarrow P$

P	$nonP$	$non\,(nonP)$	$non\,(nonP) \Leftrightarrow P$
V	F	V	V
F	V	F	V

2) La conjonction "*et*" et la disjonction "*ou*" sont commutatives

P	Q	$P\ et\ Q$	$P\ et\ Q$	$(PetQ)\ \Longleftrightarrow\ (PetQ)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

P	Q	$P\ ou\ Q$	$P\ ou\ Q$	$(PouQ)\ \Longleftrightarrow\ (PouQ)$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

3) $[non\,(P\ et\ Q) \Leftrightarrow (nonP)\,ou\,(nonQ)]\,,\,[non\,(P\ ou\ Q) \Leftrightarrow (nonP)\,et\,(nonQ)]$

P	Q	$nonP$	$nonQ$	$P\ et\ Q$	$non\,(P\ et\ Q)$	$(nonP)\ ou\ (nonQ)$	$.\Leftrightarrow.$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

P	Q	$nonP$	$nonQ$	$P\ ou\ Q$	$non\,(P\ et\ Q)$	$(nonP)\ ou\ (nonQ)$	$.\Leftrightarrow.$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V

4) $[P\ et\ \ (Q\ ou\ R)] \Leftrightarrow [(P\ et\ Q)\ ou\ (P\ et\ R)]$

P	Q	R	$Q\ ou\ R$	$P\ et\ \ (Q\ ou\ R)$	$\overbrace{P\ et\ Q}^{(1)}$	$\overbrace{P\ et\ R}^{(2)}$	$(1)\ ou\ (2)$	$.\Leftrightarrow.$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

5) $[P\ ou\ \ (Q\ et\ R)] \Leftrightarrow [(P\ ou\ Q)\ et\ (P\ ou\ R)]$

P	Q	R	$Q\ et\ R$	$P\ ou\ \ (Q\ et\ R)$	$\overbrace{P\ ou\ Q}^{(1)}$	$\overbrace{P\ ou\ R}^{(2)}$	$(1)\ et\ (2)$	(5)
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

6) $[(P \Rightarrow Q)\ \ et\ \ (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q)\ et\ (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	(6)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

7) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow [(nonQ) \Rightarrow (nonP)]$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$nonP$	$nonQ$	$(nonQ) \Rightarrow (nonP)$	$.\Leftrightarrow .$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

■

1.3 Quantificateurs

Soit $P(x)$ une proposition qui depend d'un paramètre x défini sur un ensemble E $(x \in E)$.

D■finition 1.3.1 *.*
· *Le quantificateur* universel "$\forall x$" *signifie :*

"Pour tout x" ou" Quelque soit x"

· *le quantificateur* existentiel

"$\exists x$" *signifie : "Il existe au moins un x"*

· *Le symbole*

$\exists!$ *signifie : "Il existe un seul x"*

Définition 1.3.2 *.*

. La proposition « $\forall x \in E : P(x)$ » qui est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de E.

. La proposition « $\exists x \in E : P(x)$ » qui est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E.

. La proposition «$\exists!\ x \in E : P(x)$ » il existe un unique élément x de E tel que $P(x)$ est vraie..

Exemple 1.3.1 .

1) $P_1 : (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 6x + 9 = 0)$ *est fausse.*
(car en prendre par exemple $x = 0$).

2) $P_2 : (\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0)$ *est vraie.*
(car $\exists x = 1 \in \mathbb{R}$ qui vérifie $x^2 - 1 = 0$).

3) $P_3 : (\exists x \in \mathbb{N}, 4 - 3x = 0)$ *est fausse.*
(car $\exists x = \frac{4}{3}$ qui vérifie $4 - 3x = 0$ mais $\frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$).

1.3.1 Négation du Quantificateurs

Soit $P(x)$ une proposition quantifièe alors,

1) $non\,(\forall x \in E, P(x))$ est : $\exists x \in E, non\,(P(x))$.

2) $non\,(\exists x \in E, P(x))$ est : $\forall x \in E, non\,(P(x))$.

Exemple 1.3.2 .

1) $non\,(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 6x + 9 = 0)$ *est* $(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 6x + 9 \neq 0)$

2) $non\,(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x)$ *est* $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < x)$

3) $non\,(\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x))$ *est* $(\exists x \in E,\ P(x)\, et\, (nonQ(x)))$

1.3.2 Ordre des quantificateurs

Si l'on utilise deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance. On peut permuter les quantificateurs dans des écritures du type :

$$\begin{aligned} \forall x &\in E, \forall y \in E : P(x, y) \\ \exists y &\in E, \exists x \in E : P(x, y) \end{aligned}$$

Mais si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important.
Dans l'écriture $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad P(x, y)$ y dépend de x.
Dans l'écriture $\exists y \in E \quad \forall x \in E \quad P(x, y)$ y est indépendant de x.

1. $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R} : x + y > 0$ (il suffit prendre $y = x + 1$)
2. $\exists y \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{x+1} \leq y$ (ici $y = 0$).

Exercice 1.3.1 .

Donner la négation de chacune des propositions suivantes :

$P_1 : \forall x \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ \exists r \in \mathbb{R}_+, (x = n + r\ \ et\ r < 1)$.

$P_2 : \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}, (x > A\ \Rightarrow\ |f(x) - 1| < \varepsilon)$.

$P_3 : \exists a \in \mathbb{N},\ \forall B \in \mathbb{N}^*,\ \exists q \in \mathbb{N},\ \exists r \in \mathbb{N}, (a = bq + r\ \ et\ r < b)$.

Solution. Négations de P_1, P_2, P_3

$\overline{P_1} : \exists x \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall r \in \mathbb{R}_+, (x \neq n + r \text{ ou } r \geq 1)$.

$\overline{P_2} : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall A \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, (x > A\ et\ |f(x) - 1| \geq \varepsilon)$.

$\overline{P_3} : \forall a \in \mathbb{N},\ \exists B \in \mathbb{N}^*,\ \forall q \in \mathbb{N},\ \forall r \in \mathbb{N}, (a \neq bq + r \text{ ou } r \geq b)$. ■

Exercice 1.3.2 .

Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies ou fausses :

1- $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0.$

2- $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0.$

3- $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0.$

Solution. .

1- Fausse car sa négation : $\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \exists y \in \mathbb{R}^*,\ \exists z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy \neq 0$ est vraie,

en effet $\exists x = 1,\ \exists y = 2,\ \exists z = 3,\ 3 - 2 = 1 \neq 0.$

2- Fausse car sa négation : $\exists y \in \mathbb{R}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \exists z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy \neq 0$ est vraie,

en effet $\exists y = 2,\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ \exists z = 3x$ tel que $z - xy = 3x - 2x = x \neq 0.$

3- Vraie car $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x = \frac{z}{y} \in \mathbb{R}^*$ tel que $z - xy = z - \frac{z}{y}y = 0.$

■

1.4 Types de raisonnements

Soient P et Q deux propositions

1.4.1 Raisonnement direct

D■finition 1.4.1 *Pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, on suppose que P est vraie et on montre alors Q est vraie.*

Exemple 1.4.1 *Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$, Montrer que si $a \leq b$ alors $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$*

En effet, si

$$\begin{array}{r|r} a \leq b \Rightarrow a+a \leq b+a & a \leq b \Rightarrow a+b \leq b+b \\ \Rightarrow 2a \leq b+a & \Rightarrow a+b \leq 2b \\ \Rightarrow a \leq \frac{a+b}{2} & \Rightarrow \frac{a+b}{2} \leq b \end{array}$$

Alors, $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$

1.4.2 Raisonnement par contraposée

Définition 1.4.2 *Pour montrer que l'implication* $(P \Longrightarrow Q)$ *est vraie il suffit de montrer que l'implication* $(nonQ \Rightarrow nonP)$ *est vraie.*

$$\boxed{\text{Par contraposée : } (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (non\,(Q) \Rightarrow non\,(P))}$$

Exemple 1.4.2 *Montrer que :*
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
En utilisant la contraposée $\left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$:
$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x+1)(y+1) = (x-1)(y-1) \Rightarrow x = y$

$$\begin{aligned} (x+1)(y-1) &= (x-1)(y+1) \Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \\ &\Rightarrow -x + y = x - y \\ &\Rightarrow 2x = 2y \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Alors, $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.

Exemple 1.4.3 *Montrer que si* n^2 *est pair alors* n *est pair.*
En utilisant la contraposée $\left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$: n *est impair alors* n^2 *est impair on suppose que*

$$\begin{aligned} n \textit{ impair } &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1 \\ &\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = 2\acute{k} + 1 \textit{ où } \acute{k} = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow n^2 \textit{impair} \end{aligned}$$

Alors, si n^2 *est pair alors* n *est pair.*

1.4.3 Raisonnement par l'absurde

D■finition 1.4.3 *Pour montrer que la proposition P est vraie, on montre que la proposition non (P) est $fausse$.*

Pour cela, on suppose que non (P) est vraie et on cherche une contradiction.

Exemple 1.4.4 *Soient $a, b \geq 0$, Montrer que si $\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1}$ alors $a = b$.*

En utilisant un raisonnement par l'absurde

On suppose : $\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1}$ et $a \neq b$

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+1} &= \frac{b}{a+1} \Rightarrow a(a+1) = b(b+1) \\ &\Rightarrow a^2 + a = b^2 + b \\ &\Rightarrow a^2 - b^2 = b - a \\ &\Rightarrow (a-b)(a+b) = -(a-b) \end{aligned}$$

comme $a \neq b$ alors, $a - b \neq 0$, donc on peut divise par $(a - b)$

$$(a-b)(a+b) = -(a-b) \Rightarrow a + b = -1$$

contaradiction car $a, b \geq 0$.

Alors : $\frac{a}{b+1} = \frac{b}{a+1}$ alors $a = b$.

Exemple 1.4.5 *Montrer par l'absurde que : $\sqrt{2}$ est irrationnel.*

On suppose :$\sqrt{2}$ est rationnel $\left(\sqrt{2} \in \mathbb{Q}\right)$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \diagup a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^*, a \wedge b = 1 \;\; (a \wedge b = 1) \right\}$$

On a

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \\ &\Rightarrow a^2 = 2b^2 \\ &\Rightarrow a^2 \text{ est pair} \\ &\Rightarrow a \text{ est pair} \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, a = 2k \\ &\Rightarrow (2k)^2 = 2b^2 \\ &\Rightarrow b^2 = 2k^2 \\ &\Rightarrow b^2 \text{ est pair} \\ &\Rightarrow b \text{ est pair.} \end{aligned}$$

contradiction car $a \wedge b = 1$.

Alors : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.4.4 Raisonnement par contre exemple

Pour montrer qu'une proposition du type $(\forall x \in E, P(x))$ est $fausse$, il suffit de montrer que sa négation est $vraie$.

Il suffit donc de trouver un élément x de E qui vérifie $(non\,(P(x)))$ est $fausse$.

Exemple 1.4.6 .
Montrer que la proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 4 > 0)$ *est fausse.*
la proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 4 > 0)$ *est fausse car,*
La négation de $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 4 > 0)$ *est :* $(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 4 \leq 0)$
On prend par exemple : $x = 2$*, on a :*

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= 2^2 - 5 \times 2 + 4 \\ &= -2 \leq 0 \end{aligned}$$

Alors $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 5x + 4 > 0)$ *est fausse.*

1.4.5 Raisonnement par récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une proposition $P(n)$ est $vraie$ pour tous $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, $P(n)$. La démonstration se fait en 3 étapes :

1) vérfions que $P(n_0)$ est vraie.

2) On suppose que $P(n)$ est vraie et on montrer que $P(n+1)$ est vraie. Ou bien,

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

3) Conclusion : comme $P(n_0)$ est vraie et $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie, alors, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 1.4.7 *Montre par récurrence que*

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1} = 1 + 2^n (n-1)$.
2. *Soit* x *un réel positif,* $(1+x) \geq 1 + nx$.
3. *Pour tout entier naturel* n, $7^n - 1$ *est divisible par 6.*

Solution. .
1) Soit

$$P(n) : \sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1} = 1 + 2^n (n-1)$$

1) Pour $n = 1$, on a

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{n=1} k \times 2^{k-1} = 1 \times 2^{1-1} = 1 \\ 1 + 2^n (n-1) = 1 + 2^1 (1-1) = 1 \end{array}\right\} \text{Donc, } P(1) \text{ est vraie.}$$

2) On suppose que $P(n)$ est vraie et on montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$P(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} k \times 2^{k-1} = 1 + 2^{n+1} n\,??$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{n+1} k \times 2^{k-1} & = & \sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1} + (n+1) 2^n \\ & = & 1 + 2^n (n-1) + (n+1) 2^n \\ & = & 1 + 2^n (n - 1 + 1 + n) \\ & = & 1 + 2^n 2n \\ & = & 1 + 2^{n+1} n. \end{array}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

3) Comme (1) et (2) sont vraies alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times 2^{k-1} = 1 + 2^n (n-1).$$

2) Soit

$$P(n) : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

1) Pour $n = 0$, on a

$$\left.\begin{array}{c} (1+x)^n = (1+x)^0 = 1 \\ 1 + nx = 1 + 0x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \geq 1 \text{ Donc, } P(0) \text{ est vraie.}$$

2) On suppose que $P(n)$ est vraie et on montrer que $P(n+1)$ est vraie.
$P(n+1) : (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x\,??$
On a

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^n & \geq & 1 + nx \Rightarrow (1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x) \\ & \Rightarrow & (1+x)^{n+1} \geq 1 + (1+n)x + nx^2 \\ & \Rightarrow & (1+x)^{n+1} \geq 1 + (1+n)x \text{ (car } nx^2 \geq 0). \end{array}$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie.
3) Comme (1) et (2) sont vraies alors :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

3) Soit

$$\begin{array}{rcl} P(n) & : & \forall n \geq 0, 7^n - 1 \text{ est divisible par } 6. \\ (\text{ c-à-d}, \forall n & \geq & 0, \exists k \in \mathbb{N}, 7^n - 1 = 6k) \end{array}$$

1) Pour $n = 0$, on a

$$\exists k = 0, 7^0 - 1 = 0 = 0 \times 6 \Rightarrow \text{ Donc, } P(0) \text{ est vraie.}$$

2) On suppose que $P(n)$ est vraie et on montrer que $P(n+1)$ est vraie.
$P(n+1) : \exists \acute{k} \in \mathbb{N}, 7^{n+1} - 1 = 6\acute{k}\,??$
On a

$$\begin{array}{rcl} 7^{n+1} - 1 & = & 7^n 7 - 1 \\ & = & 7^n (6+1) - 1 \\ & = & 7^n 6 + 7^n - 1 \\ & = & 7^n 6 + 6k \\ & = & 6(7^n + k) \\ & = & 6\acute{k} \text{ (où } \acute{k} = 7^n + k) \end{array}$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie.
3) Comme (1) et (2) sont vraies alors :

$$\forall n \geq 0, 7^n - 1 \text{ est divisible par } 6.$$

■

Chapitre 2

Ensembles et Applications

2.1 Ensembles et sous-ensemble

2.1.1 Généralités sur les ensembles

D■finition 2.1.1

- *Un ensemble est une collection d'objet satisfisant un certain nombre de propriétes et chacun de ces objets appellé élément de cet ensemble.*
- *Dans le cas général, on note un ensemble par une des lettres :* $A, B, C, E, F....$
- *Si* x *est un élément de* E*, on dit que* x *appartient à* E *et on note* $x \in E$*. Si* x *n'appartient pas à* E*, on note* $x \notin E$*.*
- *Un ensemble particulier est l'ensemble vide, notée* $\emptyset$ *ou aussi* $\{\}$ *qui est l'ensemble ne contient aucun élément.*

Exemple 2.1.1

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ *ensemble des nombres entiers naturels.*
- $\mathbb{Z} = \{.... - 1, -2, 0, 1, 2.....\}$ *ensemble des nombres entiers relatifs.*
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$ *ensemble des nombres rationnels.*
- $\mathbb{R}$ *ensemble des nombres réels.*
- $\mathbb{C}$ *ensemble des nombres complexes.*

D■finition 2.1.2 *On appelle cardinal de* E *le nombre d'élément de* E*, notée* $card(E)$*.*

Exemple 2.1.2

1. $E = \{x \in \mathbb{Z}, |x - 2| \leq 1\} = \{1, 2, 3\}$, $card(E) = 3$.
2. $F = \{\triangle, \bigstar, a, b\}$, $card\,(F) = 4$

2.1.2 Égalité de deux ensembles

D■finition 2.1.3 *Soit E et F deux ensembles, on dit que E et F sont égaux s'ils ont les mêmes éléments, on écrit $E = F$.*

Exemple 2.1.3 *Soient A et B deux ensembles*

1. $A = \{x \in \mathbb{R} / \ x^2 - 3x + 2 = 0\}$ *et* $B = \{1, 2\}$ *.On a*

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= 0 \Longrightarrow x = 1 ou\ x = 2 \\ &\Rightarrow x \in \{1, 2\} \end{aligned}$$

   Alors $A = B$.

2. $A = \{x \in \mathbb{R} / \ |x| < 1\}$ *et* $B =]-1, 1[$. *On a*

$$\begin{aligned} |x| &< 1 \Longrightarrow -1 < x < 1 \\ &\Rightarrow x \in]-1, 1[\end{aligned}$$

   Alors, $A = B$.

2.1.3 Inclusion

D■finition 2.1.4 *Soient A et B deux ensembles, on dit que A est inclus dans B, si chaque élément de A est un élément de B. On note $A \subset B$. On dit aussi (A est une partie de B) ou (A est un sous-ensemble de B). En d'autre termes :*

$$A \subset B \Leftrightarrow [(\forall x \in E) \ : \ x \in A \Rightarrow x \in B]$$

Remarque 2.1.1

- *On dit que A n'est pas inclus dans B s'il existe au moins un élément x de A tel que $x \notin B$ et on écrit $A \subsetneq B$.*
- *Pour tout ensemble A, on a toujours : $\varnothing \subset A$ et $A \subset A$.*

Exemple 2.1.4

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
2. *On considère l'ensemble :* $E = \{-4, -2, 0, 3, 5\}$. *On a :* $\{3\} \subset E$, $\{-4, 0, 5\} \subset E$, $\{-2, 1\} \subsetneq E$.
3. *Soit* $A = [2, 3]$, $B = [1, 4]$, $\forall x \in [2, 3] \Rightarrow x \in [1, 4]$ *alors,* $A \subset B$.

Proposition 2.1.1 *Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E.*

- *Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.*
- $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ *et* $B \subset A$.

2.1.4 Complémentaire d'un ensemble

D■finition 2.1.5 *Soit A une partie d'un ensemble E.*

L'ensemble des éléments de E n'appartenant à l'ensemble A est appelé le complémentaire de A dans E. On note $\mathcal{C}_E A$, A^c ou $\overline{A}$.

On a alors :

$$\mathcal{C}_E(A) = \{x \in E / \ x \notin A\} \quad et \quad x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A.$$

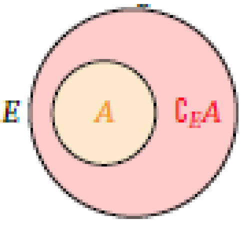


FIG.2.1. Notion de complémentaire

Exemple 2.1.5

1. *Soit $E = \{1, 2, 3, a, b\}$, $A = \{1, a, 3\}$, alors, $\mathcal{C}_E(A) = \{2, b\}$*
2. *$\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(\{0\}) = \mathbb{R}^*$, $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}^*) = \mathbb{Z}^-$, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1]) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.*
3. *Soit $A = \{x \in \mathbb{N} / 0 \le x \le 9\}$, alors, $\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(A) = \{x \in \mathbb{N} / x \ge 10\}$.*

Proposition 2.1.2 *Soit A et B deux partie d'un ensemble E. Alors :*

- $\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E(A)) = A$ *et* $\mathcal{C}_E(E) = \emptyset$ *et* $\mathcal{C}_E(\emptyset) = E$.
- $A \cap \mathcal{C}_E A = \varnothing$ *et* $A \cup \mathcal{C}_E A = E$
- $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{C}_E(B) \subset \mathcal{C}_E(A)$

2.1.5 Ensemble des paties d'un ensemble

D■finition 2.1.6 *Soit E un ensemble, Les sous-ensembles de E forment un ensemble appelé ensemble des parties de E et noté $\mathcal{P}(E)$. Autrement dit, $A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$.*

Le nombre des parties est $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ tel que : n est le nombre des éléments de E.

Exemple 2.1.6 *Soit $E = \{a, b, c\}$*

on a : $card(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 6$ car le nombre des éléments de E est 3.

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

2.1.6 Opérations sur les ensembles

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

Intersection

D■finition 2.1.7 *L'intersection des ensembles A et B, notée $A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A et dans B.En d'autres termes*

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$$

On a alors,

$$A \cap B = \{x \in E \;/\; x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints.

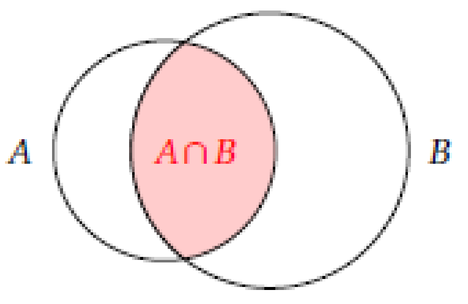


FIG.2.2. Notion d'intersection

Exemple 2.1.7 *Soient $A = \{0, 2, 4, 7, 10\}$, $B = \{2, 4, 7, 1\}$, $C = [-3, 2]$ et $D =]0, 5[$.*

On a $A \cap B = \{2, 4, 7\}$, $C \cap D =]0, 2]$.

Union

D■finition 2.1.8 (Union) *L'union ou réunion des ensembles A et B, notée $A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui sont dans A ou dans B définie par :*

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Alors

$$A \cup B = \{x \in E \;/\; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

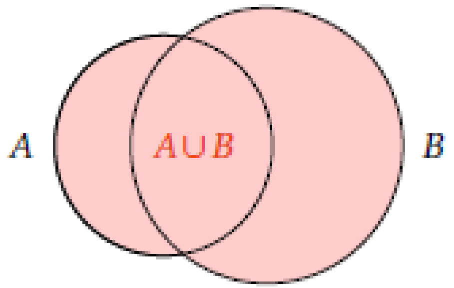


FIG.2.3. Notion d'union

Exemple 2.1.8 *Soient* $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,5,6,7\}$, $C = [-2,3]$, $D = [0,5[$

On a $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $C \cup D = [-2,5[$.

Proposition 2.1.3 *Soient* A, B, C *trois sous-ensembles de* E. *On a :*

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$ *et* $A \cup \varnothing = \varnothing$
2. $(A \cap B) \subset A$ *et* $(A \cap B) \subset B$
3. $A \subset (A \cup B)$ *et* $B \subset (A \cup B)$
4. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
5. $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$
6. $\left.\begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cup B = B \cup A \end{array}\right\}$ *commutatives*
7. $\left.\begin{array}{l} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array}\right\}$ *associatives*
8. $\left.\begin{array}{l} (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{array}\right\}$

   $\cap$ *(réspectivent* $\cup$*) est distributive par rapport* $\cup$ *(réspectivent* $\cap$*)*
9. $\mathcal{C}_E (A \cap B) = \mathcal{C}_E A \cup \mathcal{C}_E B$
10. $\mathcal{C}_E (A \cup B) = \mathcal{C}_E A \cap \mathcal{C}_E B$.

<u>Différence et Différence symétrique</u>

D■finition 2.1.9 (Différence) *La* $dif f$*érence des ensemble* A *et* B, *noté* $A \backslash B$ *(ou* $A - B$*) est l'ensemble des éléments de* A *qui ne sont pas dans* B. *En d'autres termes :*

$$x \in A \backslash B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) .$$

Alors

$$A \backslash B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Exemple 2.1.9

Soient $A = \{1, 2, 3, a, b\}$, $B = \{4, 0, 3, b, 1\}$, $C = [-2, 1]$,
$D =]0, 5[$
Alors on a : $A \backslash B = \{2, a\}$, $B \backslash A = \{4, 0\}$, $C \backslash D = [-2, 0]$,
$D \backslash C =]1, 5[$.

Proposition 2.1.4 *Soit A un ensemble alors :*

- $A \backslash A = \emptyset$
- $A \backslash \emptyset = A$
- $A \backslash B = A \cap C_E B$

D■finition 2.1.10 (Déffirence symétrique) *La différence symétrique de A et B est l'ensemble des élément qui sont dans un et un seul des deux ensembles A et B, notée* $A \Delta B$ *défini par :*

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) .$$

Exemple 2.1.10 *Soient* $A = \{1, 2, 3, a, b\}$, $B = \{4, 0, 3, b, 1\}$, *alors on a :*

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= \{0, 1, 2, 3, 4, a, b\} \setminus \{1, 3, b\} \\ & \{0, 2, 4, a\} \end{aligned}$$

Proposition 2.1.5 *Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E, on a :*

1. $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$
2. $(A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C = A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C)$ (associative)
3. $A \Delta B = B \Delta A$ (commutative)
4. $A \Delta \emptyset = A$ ($\varnothing$ élément neutre)
5. $A \Delta A = \emptyset$
6. $A \cap (B \bigtriangleup C) = (A \cap B) \bigtriangleup (A \cap C)$ ($\cap$ distributive par rapport à $\bigtriangleup$).

Preuve. 1. $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap \mathcal{C}_E (A \cap B) \\ &= (A \cap \mathcal{C}_E (A \cap B)) \cup (B \cap \mathcal{C}_E (A \cap B)) \\ &= [(A \cap \mathcal{C}_E A) \cup (A \cap \mathcal{C}_E B)] \cup [(B \cap \mathcal{C}_E A) \cup (B \cap \mathcal{C}_E B)] \\ &= [\varnothing \cup (A \cap \mathcal{C}_E B)] \cup [(B \cap \mathcal{C}_E A) \cup \varnothing] \\ &= (A \cap \mathcal{C}_E B) \cup (B \cap \mathcal{C}_E A) \\ &= (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \end{aligned}$$

2. $A\Delta B = B\Delta A$

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A\cup B)\setminus(A\cap B) \\ &= (B\cup A)\setminus(B\cap A) \ \text{(car } \cap \text{ et } \cup \text{ sont commutatives)} \\ &= B\triangle A \end{aligned}$$

3. $A\Delta A = \emptyset$

$$\begin{aligned} A\Delta A &= (A\backslash A)\cup(A\backslash A) \\ &= \varnothing\cup\varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

4. $A\Delta\emptyset = A$

$$\begin{aligned} A\Delta\emptyset &= (A\backslash\varnothing)\cup(\varnothing\backslash A) \\ &= A\cup\varnothing \\ &= A \end{aligned}$$

5. $A\Delta E = \mathcal{C}_E A$

$$\begin{aligned} A\Delta E &= (A\backslash E)\cup(E\backslash A) \\ &= \varnothing\cup\mathcal{C}_E A \\ &= \mathcal{C}_E A \end{aligned}$$

6. $A\Delta\mathcal{C}_E A = E$

$$\begin{aligned} A\Delta\mathcal{C}_E A &= (A\backslash\mathcal{C}_E A)\cup(\mathcal{C}_E A\backslash A) \\ &= A\cup\mathcal{C}_E A \\ &= E. \end{aligned}$$

■

2.1.7 Produit cartésien

D■finition 2.1.11 *Soit E et F deux ensembles.*

Le produit cartésien des ensembles E et F, notée $E\times F$, est l'ensemble des couples (x,y) tels que $x\in E$ et $y\in F$. On a alors :.

$$E\times F = \{(x,y) : x\in E \ \textit{et}\ y\in F\}$$

Remarque 2.1.2

- *Si* $E = F$, *le produit cartésien* $E \times E$ *est noté* E^2 *et appelé le carré cartésien de* E.
- $E \times F = \varnothing \Leftrightarrow (E = \varnothing \text{ ou } F = \varnothing)$.

Exemple 2.1.11 *1) Soient* $E = \{0, 1, 2\}$ *et* $F = \{a, b\}$, *alors :*

$$\begin{aligned} E \times F &= \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}; \\ F^2 &= \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a)\} \end{aligned}$$

2) Soit $E = [0, 1], F = \mathbb{R}$, *alors,*

$$E \times F = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$$

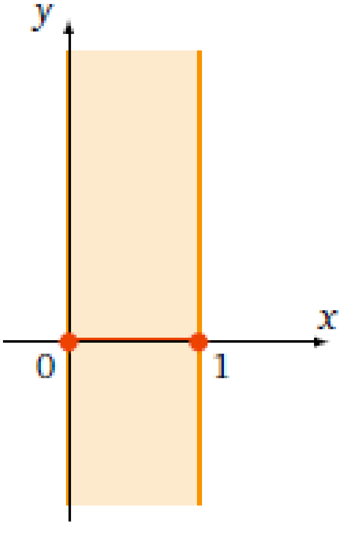


FIG.2.4. Notion de $[0, 1] \times \mathbb{R}$

Remarque 2.1.3

- *Si* $E = F$, *le produit cartésien* $E \times E$ *est noté* E^2 *et appelé le carré cartésien de* E.
- $E \times F = \varnothing \Leftrightarrow (E = \varnothing \text{ ou } F = \varnothing)$.

Exercice 2.1.1 *Soient* A *et* B *deux sous ensembles de* $\mathbb{R}$ *telque :*

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 2\} \\ B &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 2} \geq 0\right\} \end{aligned}$$

Déterminer : $A \cap B, A \cup B, A^c, B^c, A \setminus B, B \setminus A, A \triangle B$.

Solution.

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x-1 \leq 2\} \end{aligned}$$

Alors, $A = [-2, 2]$

$$\begin{aligned} B &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-4x+3}{x^2+2}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-4x+3}{x^2+2} \geq 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{(x-1)(x-3)}{x^2+2} \geq 0\right\} \end{aligned}$$

Alors, $B =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$
On a

$$\begin{aligned} A \cap B &= [-2, 1] \\ A \cup B &=]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[\\ A^c &=]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\\ B^c &=]1, 3[\\ A \setminus B &=]1, 2] \\ B \setminus A &=]-\infty, -2[\cup [3, +\infty[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &=]-\infty, -2[\cup]1, 2] \cup [3, +\infty[\end{aligned}$$

■

2.2 Relations binaires

2.2.1 Généralités

D■finition 2.2.1 *Soient E et F deux ensembles non vide, une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $E \times F$ est donné d'un sous ensemble Γ de $E \times F$, on note*

$$\forall x \in E, \forall y \in F : x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x, y) \in \Gamma.$$

Si $E = F$ on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E (ou bien de $E \times E$.

Exemple 2.2.1
Soit $E = \{1, , 2, 3\} = F$, *alors : .*

$$E \times F = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$$

Soit :
1) $\Gamma = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ *alors :*

$$\forall x, y \in E, \ \ (x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow x = y$$

2) $\Gamma = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2)\}$ *alors :*

$$\forall x, y \in E, \ \ (x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow x \leq y$$

3) $\Gamma = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$ *alors :*

$$\forall x, y \in E, \ \ (x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow x < y$$

D■finition 2.2.2 ***(Propriétés des relations binaires)***
Une relation binaire $\mathcal{R}$ *dans un ensemble* E *est :*
1) $réflixive$ *si :*

$$\forall x \in E, x\mathcal{R}x$$

2) *symétrique si :*

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

3) *antisymétrique si :*

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$$

4) $transitive$ *si :*

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

Exemple 2.2.2 *1) Soit la relation* $\mathcal{R}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$$

1) $\mathcal{R}$ *est réflexive :* $\forall x \in \mathbb{R}, \ x \leq x$.
2) $\mathcal{R}$ *n'est pas symétrique : car pour* $x = 1$ *et* $y = 2$ *,*
on a $1 \leq 2$ *mais* $2 \nleq 1$.
3) $\mathcal{R}$ *est antisymétrique :* $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x \leq y$ *et* $y \leq x \Rightarrow x = y$.
4) $\mathcal{R}$ *est transitive :* $\forall x, \ y, \ z \in \mathbb{R}, \ x \leq y$ *et* $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

2) Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \; A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$$

1) $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \; A \subset A$.
2) $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique :
car (en prendre par exemple $A = \{1\}$ et $B = \{1, 2\}$, on a $A \subset B$ mais $B \not\subset A$).
3) $\mathcal{R}$ est antisymétrique : $\forall A,\, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \; A \subset B$ et $B \subset A \Rightarrow A = B$.
4) $\mathcal{R}$ est transitive : $\forall A,\, B,\, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \; A \subset B$ et $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

2.2.2 Relations d'équivalence

D■finition 2.2.3 *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est : réflexive, symétrique et transitive.*

Exemple 2.2.3 *La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y.$$

est une relation d'équivalence.

Exemple 2.2.4 *La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x - y = 3k.$$

est une ralation d'équivalence car :
1) $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x \in \mathbb{Z},\; x\mathcal{R}x$.

$$x - x = 0 = 3k \;\; (\exists k = 0 / 0 = 3 \times 0) \Leftrightarrow x\mathcal{R}x.$$

alors $\mathcal{R}$ est réflexive.
2) $\mathcal{R}$ est symétrique : $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x - y = 3k \\ &\Rightarrow -(y - x) = 3k \\ &\Rightarrow y - x = -3k, \text{ on pose } \acute{k} = -k \\ &\Rightarrow y - x = 3\acute{k} \\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x. \end{aligned}$$

alors $\mathcal{R}$ est symétrique.

4) $\mathcal{R}$ est transitive : $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{Z},\ x\mathcal{R}y$ *et* $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}/\ x-y=3k \\ \text{et} \\ \exists \acute{k} \in \mathbb{Z}/\ y-z=3\acute{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x-z=3k+3\acute{k}=3\left(k+\acute{k}\right) \quad \text{on pose } \acute{\acute{k}}=k+\acute{k}$$

$$\Rightarrow \quad x-z=3\acute{\acute{k}}$$

$$\Rightarrow \quad x\mathcal{R}z.$$

alors, $\mathcal{R}$ est transitive.

Classe d'équivalence

D■finition 2.2.4 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et soit a un élément de E. On appelle classe d'équivalence de a, et on note $cl\,(a)$ ou $\dot{a}$ est l'ensemble définie par les elements E :*

$$cl\,(a)=\{x\in E \setminus x\mathcal{R}a\}$$

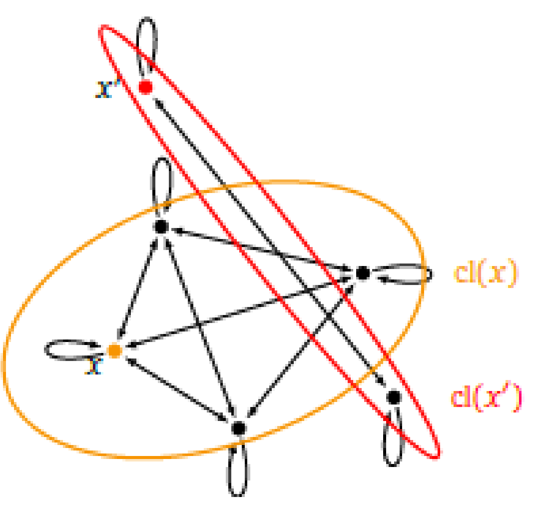


FIG.2.5. Notion la classe d'équivalence

D■finition 2.2.5

1) Les classes d'équivalences pour $\mathcal{R}$ forment une partition *de E.*

2) L'ensemble des classes d'équivalence est appelé l'ensemble quotient *de E par $\mathcal{R}$ et noté $E/_{\mathcal{R}}$.*

Exemple 2.2.5 *Soit la relation d'équivalence de l'exemple précédent définie sur $\mathbb{Z}$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \diagup x - y = 3k.$$

Les classe d'équivalence de 0 *est :*

$$\begin{aligned} cl(0) &= \{x \in \mathbb{R} \diagup x\mathcal{R}0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \diagup \exists k \in \mathbb{Z} \diagup x - 0 = 3k\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \diagup \exists k \in \mathbb{Z} \diagup x = 3k\} \\ cl(0) &= \{..... - 6, -3, 0, 3, 6, ...\} \end{aligned}$$

Exercice 2.2.1 *On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par :*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$$

a) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Solution. 1) $\mathcal{R}$ réflexive : On a

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Alors, $\mathcal{R}$ est réflexive.

2) $\mathcal{R}$ symétrique : On a $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Rightarrow \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1 \\ &\Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(y) \\ &\Rightarrow 1 - \sin^2(x) = \cos^2(y) \\ &\Rightarrow \cos^2(y) + \sin^2(x) = 1 \\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{R}$ est symétrique.

3) $\mathcal{R}$ transitive : On a $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1 \\ \cos^2(y) + \sin^2(z) = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \cos^2(x) + \sin^2(y) + \cos^2(y) + \sin^2(z) = 2 \\ &\Rightarrow \cos^2(x) + 1 + \sin^2(z) = 2 \\ &\Rightarrow \cos^2(x) + \sin^2(z) = 1 \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{R}$ est transitive.

D'aprés 1), 2) et 3) : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Classe d'équivalence de 0 et $\frac{\pi}{2}$:On a

$$\begin{aligned} cl\left(0\right) &= \left\{y \in \mathbb{R} : 0\mathcal{R}y\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \cos^2\left(0\right) + \sin^2\left(y\right) = 1\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : 1 + \sin^2\left(y\right) = 1\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \sin^2\left(y\right) = 0\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \sin\left(y\right) = 0\right\} \\ &= \left\{k\pi \setminus k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Pour $cl\left(\frac{\pi}{2}\right)$, on a

$$\begin{aligned} cl\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left\{y \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{2}\mathcal{R}y\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin^2\left(y\right) = 1\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \sin^2\left(y\right) = 1\right\} \\ &= \left\{y \in \mathbb{R} : \sin\left(y\right) = \pm 1\right\} \\ &= \left\{\left(2k+1\right)\frac{\pi}{2} \ : k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

■

2.2.3 Relations d'ordre

D■finition 2.2.6 *Une relation binaire, est une relation d'ordre si elle est, à la fois, réflexive, antisymétrique et transitive.*

Exemple 2.2.6 *La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \leq y$$

est une relation d'ordre car :

1) $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$.

2) $\mathcal{R}$ est antisymétrique :$\forall x,\ y \in \mathbb{R},\ (x \leq y$ et $y \leq x) \Rightarrow x = y$.

4) $\mathcal{R}$ est transitive : $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}, (x \leq y$ et $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.

Exemple 2.2.7 *La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)$ par*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right),\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow A \subset B$$

est une est une relation d'ordre car :

1) $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,,\ A \subset A.$

2) $\mathcal{R}$ est antisymétrique :$\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\,,\ (A\mathcal{R}B \text{ et } B\mathcal{R}A) \Leftrightarrow A = B.$

4) $\mathcal{R}$ est transitive : $\forall A,\ B,\ C \in \mathbb{R}, (A\mathcal{R}B \text{ et } B\mathcal{R}C) \Rightarrow A\mathcal{R}C.$

Relation d'ordre total, partiel

D■finition 2.2.7 *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E.*

– On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total si :

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x.$$

– On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel si :

$$\exists x, y \in E, x\not{\mathcal{R}}y \text{ et } y\not{\mathcal{R}}x.$$

Exemple 2.2.8 .

1) *La relation " $\leq$ ", définie sur $\mathbb{R}$, est une relation d'ordre total :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

2) *La relation " $\subset$ ", définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, est une relation d'ordre partiel :*

$$\text{car : par exemple } \{a\} \not\subset \{b\} \text{ et } \{b\} \not\subset \{a\}\,.$$

2.2.4 Majorants-Minorant

D■finition 2.2.8 *Soit A une partie d'un ensemble E. $\mathcal{R}$ Une relation d'ordre sur E :*

- *Soit $M \in E$, on dit que M est un majorant de A si :*

$$\forall x \in A : x\mathcal{R}M.$$

- *Soit $m \in E$, on dit que m est un minorant de A si :*

$$\forall x \in A : m\mathcal{R}x.$$

D■finition 2.2.9 *Soit A une partie d'un ensemble, soient $M, m \in E$*

Remarque 2.2.1 .

• *Si l'ensemble A possède un majorant M alors on dit que A est une* ***partie majorée.***

• *Si l'ensemble A possède un minorant m alors on dit que A est une* ***partie minorée.***

• *Si l'ensemble A possède un majorant et un minorant alors on dit que A est une* ***partie bornée.***

Exemple 2.2.9 .

Dans $\mathbb{R}$, considérons la relation d'ordre " $\leq$ " et soit $A = [1, 7[$. Alors :

♦ *Les majorants de A sont $A^+ = [7, +\infty[$.*

♦ *Les minorants de A sont $A^- =]-\infty, 1]$.*

Maximum-Minimum

D■finition 2.2.10 *Soit $\mathcal{R}$ Une relation d'ordre sur E, et soit $A \subset E$.*

♦ *On dit que M est un plus grand élément de A si (M est un majorant de A et $M \in A$). On le note* $\max(A)$.

♦ *On dit que m est un plus petit élément de A si (m est un minirant de A et $m \in A$). On le note* $\min(A)$.

Borne supérieure - Borne inférieure

D■finition 2.2.11 *Soient A un sous-ensemble de E et M un élément de E.*

♦ *On dit que M est une borne supérieure de A si M est un plus petit élément de l'ensemble des majorants de A et on note* $\sup(A)$.

$$\sup(A) = \min\left(A^+\right).$$

♦ *On dit que m est une borne inférieure de A si m est un plus grand élément de l'ensemble des minorants de A et on note* $\inf(A)$.

$$\inf(A) = \max\left(A^-\right).$$

Remarque 2.2.2 .

1) *Si* $\sup(A) \in A$ *alors* $\sup(A) = \max(A)$.

2) *Si* $\inf(A) \in A$ *alors* $\inf(A) = \min(A)$.

Exemple 2.2.10 *Soit l'ensemble $A = [1, 7[$.*

• $\sup(A) = \min(A^+) = 7$ *et comme* $\sup(A) \notin A$

alors, $\max(A)$ *n'existe pas.*

- $\inf(A) = \max(A^-) = 1$ *et comme* $\inf(A) \in A$
  alors, $\inf(A) = \min(A) = -1.$

Exemple 2.2.11 *On définit sur* $\mathbb{N}^*$ *la relation binaire* $\mathcal{R}$ *par :*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ divise } y$$

a) Montrons que $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre :*
On écrit la relation $\mathcal{R}$ *comme suit*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : y = kx$$

1) $\mathcal{R}$ *est réflexive :* $\forall x \in \mathbb{N}^*,$

$$\exists k = 1 \in \mathbb{N}^* : x = 1 \times x \Rightarrow x\mathcal{R}x$$

2) $\mathcal{R}$ *est anti-symétrique :* $\forall x, y \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}^* : y = kx \\ \exists k' \in \mathbb{N}^* : x = k'y \end{cases} \\ &\Rightarrow x = k'kx \Rightarrow k'k = 1 \\ &\Rightarrow k = 1 \text{ et } k' = 1 \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

3) $\mathcal{R}$ *est transitive :* $\forall x, y, z \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N}^* : y = kx \\ \exists k' \in \mathbb{N}^* : z = k'y \end{cases} \\ &\Rightarrow z = k'kx \\ &\Rightarrow \exists k'' \in \mathbb{N}^* : z = k''x \text{ avec } k'' = k'k \\ &\Rightarrow x\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

D'aprés 1), 2) *et* 3) $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre.*
b) $\mathcal{R}$ *n'est pas total car*

$$\exists 2, 3 \in \mathbb{N}^* : 2 \text{ ne divise pas } 3 \text{ et } 3 \text{ ne divise pas } 2.$$

c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ *:*

$$\begin{aligned} \forall x &\in \mathbb{N}^* : m\mathcal{R}x \\ \forall x &\in \mathbb{N}^* : m \text{ divise } x \\ &\Rightarrow m = 1. \end{aligned}$$

Alors, $\min(\mathbb{N}^*) = 1.$

Soit $M \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \forall x &\in \mathbb{N}^* : x\mathcal{R}M \\ \forall x &\in \mathbb{N}^* : x \text{ divise } M \\ &\Rightarrow M \text{ n'existe pas.} \end{aligned}$$

Alors, $\max(\mathbb{N}^*)$ *n'exite pas.*

2.3 Applications

D■finition 2.3.1 *Soient* E *et* F *deux ensembles.*

On appelle une application d'un ensemble E *dans un ensemble* F *toute correspondance* f *permettant d'associer à tout élément* $x \in E$ *un seul élément* $y \in F$.

• E *est dit ensemble de* départ , F *ensemble* d'arrivée. *On note l'élément* y *de* F *associé à un élément* x *de* E *par* $y = f(x)$.

• $y = f(x)$ *est appelé* l'image *de* x *et* x *est un* antécédent *de* y. *On écrit :*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & E \longrightarrow F \\ & x \longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

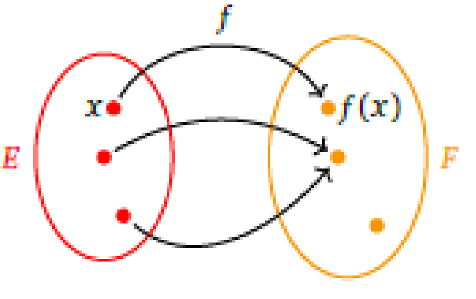


FIG.2.6. Notion d'application

D■finition 2.3.2 *Soit* E *et* F *deux ensembles, on note* $\mathcal{A}(E, F)$ *l'ensemble des applications de* E *vers* F.

Exemple 2.3.1 .

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = x + 4$

f est une application car chaque $x \in \mathbb{R}$, il existe un seul $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = x + 4$.

2) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) = \sqrt{x-1}$$

g n'est pas une application car il exist $x = -1$ on a $y = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$.

2.3.1 L'application identité

D■finition 2.3.3 *Soit E un ensemble, l'application identité de E dans E notée Id_E est définie par :*

$$Id_E(x) = x.$$

2.3.2 L'application constante

D■finition 2.3.4 *Soient E et F deux ensembles et c un élément de F, alors l'application f de E vers F est une application constante si*

$$\forall x \in E, \ f(x) = c.$$

2.3.3 Egalité

D■finition 2.3.5 *Soient $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ deux applications. On dit que f et g sont égales si et seulement si :*

1) $E = E'$ *et* $F = F'$

2) $\forall x \in E, \ f(x) = g(x)$.

2.3.4 Image directe- Image réciproque

Soient E, F deux ensembles

a) <u>Image directe</u>

D■finition 2.3.6 *Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$ et . On appelle* ***image directe*** *de A par f , noté $f(A)$ est l'ensemble :*

$$f(A) = \{f(x), \ x \in A\}$$

formellement on a

$$\forall y \in F, (y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A : y = f(x)).$$

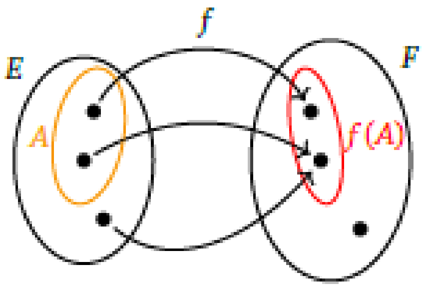


FIG.2.7. Notion l'image directe

Exemple 2.3.2 *On considère l'application*

$$f \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 1 - x$$

$$f\left(\left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right) = \left\{f(x), x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right\}$$

On a

$$\frac{-1}{2} \leq x \leq 0 \Longrightarrow 0 \leq -x \leq \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow 1 \leq 1 - x \leq \tfrac{3}{2}$$

d'où

$$f\left(\left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right) = \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

b) Image réciproque

D■finition 2.3.7 *Soit $B \subset F$ et $f : E \to F$, l'**image réciproque** de B par f, noté $f^{-1}(B)$ est l'ensemble :*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, \; f(x) \in B\}.$$

Formellement on a

$$\forall x \in E, x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

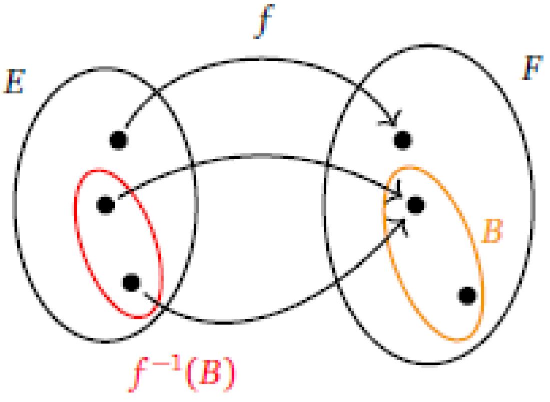


FIG.2.8. Notion l'image réciproque

Exemple 2.3.3 *Soient* $E = \{1,2,3,4\}$, $F = \{a,b,c,d,e\}$ *et* $f : E \to F$ *définie par :*

$$f(1) = f(2) = a,\ \ f(3) = c,\ \ f(4) = e.$$

On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{b\}) &= \{x \in E, f(x) \in \{b\}\} \\ &= \{x \in E, f(x) = b\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

et

$$f^{-1}(\{a\}) = \{1,2\},\ \ f^{-1}(\{a,b,d\}) = \{1,2\}$$

Exemple 2.3.4 *Soit l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to x^2 \end{aligned}$$

On a :

1) $f^{-1}(\{9\})$

$$f^{-1}(\{9\}) = \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 = 9\right\} = \{-3,3\}$$

2) $f^{-1}\left(\left]0,\frac{1}{2}\right[\right)$

$$f^{-1}\left(\left]0,\frac{1}{2}\right[\right) = \left\{x \in \mathbb{R}, x^2 \in \left]0,\frac{1}{2}\right[\right\}$$

alors

$$0 < x^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc,

$$f^{-1}\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right) = \left]\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$$

Remarque 2.3.1 *$f(A)$ est un sous-ensemble de F, $f^{-1}(B)$ est un sous-ensemble de E.*

Proposition 2.3.1 *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, $A, B \subset E$ et $M, N \subset F$. On a*

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
4. $M \subset N \Rightarrow f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$
5. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$
6. $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$

Preuve.

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
On suuppose que $A \subset B$ et on montrer que $f(A) \subset f(B)$ alors,
Soit

$$\begin{aligned} y &\in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x \in A, f(x) = y \quad (\text{car } A \subset B) \\ &\Rightarrow y \in f(B) \end{aligned}$$

2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y &\in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x \in A \cup B, y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x, ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow \exists x, [((x \in A) \wedge (y = f(x))) \vee ((x \in B) \wedge (y = f(x)))] \\ &\Leftrightarrow (y \in f(A)) \vee \ (y \in f(B)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

d'où $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
Soit $y \in F$, alors

$$\begin{aligned} y &\in f(A \cap B) \Leftrightarrow \exists x \in A \cap B, y = f(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x, ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge (y = f(x)) \\ &\Rightarrow \exists x, [((x \in A) \wedge y = f(x)) \wedge ((x \in B) \wedge y = f(x))] \\ &\Rightarrow (y \in f(A)) \wedge (\ y \in f(B)) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

d'où $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Autre méthode :
On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc par la propriété (1), on a

$$f(A \cap B) \subset f(A) \text{ et } f(A \cap B) \subset f(B)$$

d'où

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

4. $M \subset N \Rightarrow f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$
On suppose $M \subset N$ et on montrer que $f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$.
Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} x &\in f^{-1}(M) \Leftrightarrow f(x) \in M \\ &\Rightarrow f(x) \in N \quad (\text{car } M \subset N) \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(N) \end{aligned}$$

d'où $M \subset N \Rightarrow f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$.
5. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$
Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} x &\in f^{-1}(M \cup N) \Leftrightarrow f(x) \in (M \cup N) \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in M) \vee (f(x) \in N) \\ &\Leftrightarrow \left(x \in f^{-1}(M)\right) \vee \left(x \in f^{-1}(N)\right) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) \end{aligned}$$

d'où $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.
6. $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$
Soit $x \in E$

$$\begin{aligned} x &\in f^{-1}(M \cap N) \Leftrightarrow f(x) \in (M \cap N) \\ &\Leftrightarrow (f(x) \in M) \wedge (f(x) \in N) \\ &\Leftrightarrow \left(x \in f^{-1}(M)\right) \wedge \left(x \in f^{-1}(N)\right) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r] \arrow[r, bend left, "g"] & G \end{tikzcd}$$

d'où $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$. ■

2.3.5 Composée de deux applications

D■finition 2.3.8 *Soient E, F, G trois ensembles non vide, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications,on appelle la composée des applications de f et g, notée par $g \circ f$ est l'application de E vers G définie par :*

$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemple 2.3.5 *Soient*

$$\begin{aligned} f \ :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g \ :\ & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Alors, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(x^2\right) = \sqrt{x^2} = |x|$$

et $f \circ g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = x$$

Remarque 2.3.2 .

1) *Soit f une application E dans E. On note par :*

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ f ... \circ f}_{n \text{ fois}}$$

2) *La composition des applications n'est pas généralement commutative :*

$$f \circ g \neq g \circ f$$

3) *Soient les ensembles E, F, G, H et les applications f, g, h tels que :*

$$f : E \to F, g : F \to G, h : G \to H$$

Alors :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

La composition "$\circ$"est associative.

2.3.6 Restriction et prolongement d'une application

D■finition 2.3.9 *Soit A un sous-ensemble de E. Étant données deux fonctions $g : E \to F$ et $f : A \to F$ tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$. Alors, on dit que :*

*f est la **restriction** de g à A et on note $f = g|_A$*

*g est un **prolongement** de f à E et on note $g = \widetilde{f}$.*

Exemple 2.3.6 .

1) *Soient f et g définies par :*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \quad : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

f est la restriction de g à $\mathbb{R}_+$ $\left(f = g|_{\mathbb{R}_+}\right)$ et g est un prolongement de f à $\mathbb{R}$ $\left(g = \widetilde{f}\right)$.

2) *Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

L'application $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{e^x+1}{x} & si \; x \neq 2 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

$\widetilde{f}$ est un prolongement de f à $\mathbb{R}$.

2.3.7 Applications injectives, surjectives et bijectives

Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application

Applications injectives

Définition 2.3.10 *L'application f est une* injective *si et seulement si :*

$$\forall x_1, x_2 \in E : (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

- *f est injective si et seulement si : $\exists x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$ (par la contraposée).*
- *f est injective si et seulement si tout élément y de F admet au plus un antécédent par f (c'est-à-dire un ou aucun).*

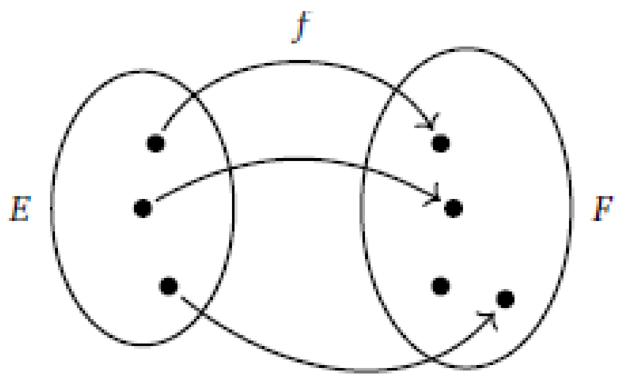


FIG.2.9. Notion d'application injective

Exemple 2.3.7

1- On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 3x + 1$
f est-elle injective ?
Soient deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \\ &\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

d'où f est injective.
2- L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2$ n'est injective car :

$$\exists x_1 = -3, x_2 = 3 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) = 9 \text{ et } x_1 \neq x_2.$$

Applications surjectives

D■finition 2.3.11 *L'application f est une* surjection *(ou est une* surjective*) si et seullement si :*

$$\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x).$$

- f *est* surjective *si et seulement si tout élément $y \in F$ a* au moins *un antécédent dans E.*
- f *est* surjective *si et seulement si* $\operatorname{Im} f = F$ *(ensemble d'arrivée).*

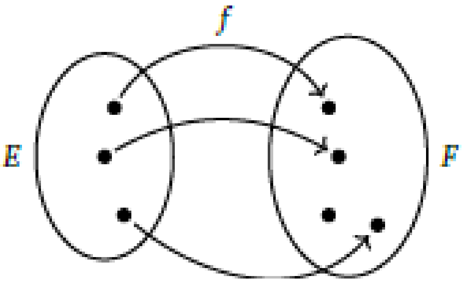


FIG.2.10. Notion d'application surjective

Exemple 2.3.8 *Soit*

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \\ & n \mapsto f(n) = \frac{1}{1+n} \end{aligned}$$

Si $m \in \mathbb{Q}, \exists ? n \in \mathbb{N}$ *tel que* $m = f(n) \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{1+n} \Leftrightarrow m + mn = 1 \Leftrightarrow mn = 1 - m \Leftrightarrow n = \dfrac{1-m}{m}, m \in \mathbb{Q}$. *Si par exemple* $m = 2 \Rightarrow n = -\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. *Donc f n'est pas surjective car $m = 2$ n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}$.*

Applications bijectives

D■finition 2.3.12 *L' application f est dite* bijective *si et seulement si elle est injective et surjective à la fois. Ceci est équivaut à dire que pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit*

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E : y = f(x).$$

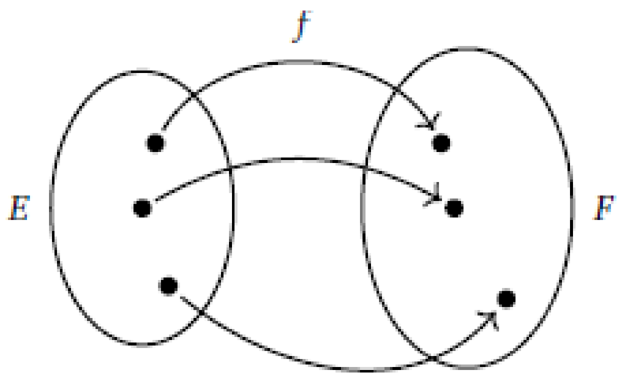


FIG.2.11. Notion d'application bijective

Exemple 2.3.9 1) *L'application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :* $f(x) = 3x + 2$ *est*

a) injective :

$$\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) \ = \ f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

b) surjective :

$$\begin{aligned} \forall y \ &\in \ \mathbb{R} : y = f(x) = 3x + 2 \Rightarrow x = \frac{y-2}{3} \\ \forall y \ &\in \ \mathbb{R}, \exists x = \frac{y-2}{3} \in \mathbb{R} : y = f(x). \end{aligned}$$

Alors f *est bijective.*

2) *L'application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par :* $g(x) = x^2$ *n'est pas injective car :*

$$\exists x_1 = -1 \in \mathbb{R}, \ \exists x_2 = 1 \in \mathbb{R} : f(x_1) \ = \ f(x_1) \ \ et \ x_1 \neq x_2$$

Aussi n'est pas surjective car :

$$\exists y = -1 \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R} : -1 \neq x^2.$$

2.3.8 Application réciproque

D■finition 2.3.13 *Soit* $f : E \to F$ *une bijective. On appelle* application réciproque *de* f *(ou bijection réciproque de* f*). c-à-d*

$$\begin{aligned} f^{-1} \ \ &: \ \ F \to E \\ &\quad y \mapsto x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Exemple 2.3.10 1) *Soit f l'application de $\{1,2,3\}$ dans $\{a,b,c\}$ telle que $f(1) = a$, $f(2) = b$ et $f(3) = c$, elle est bijective. Sa réciproque f^{-1} est l'application de $\{a,b,c\}$ dans $\{1,2,3\}$ donnée par $f^{-1}(a) = 1$, $f^{-1}(b) = 2$, $f^{-1}(c) = 3$.*

2) *L'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 3x - 2$. L'application réciproque de g est*

$$\begin{aligned} g^{-1} \quad : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{x+2}{3} \end{aligned}$$

.

Remarque 2.3.3 *Soit $f : E \to F$ une bijective. Alors*

$$f \circ f^{-1} = Id_F$$

et

$$f^{-1} \circ f = Id_E.$$

Exercice 2.3.1 *Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 4x + 1$.*

1) Résoudre $f(x) = 1$ et $f(x) = -5$.

2) f est-elle injective ?surjective ?

3) Vérifier que : $f(x) = (x+2)^2 - 3$.

4) Déterminer $f([-1,2])$, $f(\{0,1\})$, $f^{-1}([-2,6])$ et $f^{-1}(\{-3,6\})$.

5) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-2,+\infty[$.

Soit la restriction $g : [-2,+\infty[\to [-3,+\infty[$, $g(x) = f(x)$.

6) Montrer que g est bijective et trouver sa fonction réciproque g^{-1}.

Solution.

$$f(x) = x^2 + 4x + 1$$

1) <u>Résolution</u> : $f(x) = 1$ et $f(x) = -5$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 1 \\ &\Rightarrow x^2 + 4x = 0 \\ &\Rightarrow x(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -5 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = -5 \\ &\Rightarrow x^2 + 4x + 6 = 0 \Rightarrow \triangle = -8 < 0 \text{ pas de solution} \end{aligned}$$

2) f n'est pas injective car : $f(0) = f(-4)$ mais $0 \neq -4$
f n'est pas surjective car : (-5) n'a pas un antécédent x.
3) $(x+2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 4 - 3 = x^2 + 4x + 1 = f(x)$.
4) $f([-1,2])$:

$$f([-1,2]) = \{f(x) : x \in [-1,2]\}$$

On a

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x+2 \leq 4 \\ &\Rightarrow 1 \leq (x+2)^2 \leq 16 \\ &\Rightarrow -2 \leq (x+2)^2 - 3 \leq 13 \\ &\Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 13 \end{aligned}$$

Alors

$$f([-1,2]) = [-2,13]$$

- $f(\{0,1\})$:

$$\begin{aligned} f(\{0,1\}) &= \{f(x) : x \in \{0,1\}\} \\ &= \{f(0), f(1)\} \\ &= \{1,6\} \end{aligned}$$

- $f^{-1}([-2,6])$:

$$f^{-1}([-2,6]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-2,6]\}$$

On a

$$\begin{aligned} -2 &\leq f(x) \leq 6 \Rightarrow -2 \leq (x+2)^2 - 3 \leq 6 \\ &\Rightarrow 1 \leq (x+2)^2 \leq 9 \\ &\Rightarrow 1 \leq |x+2| \leq 3 \\ &\Rightarrow 1 \leq x+2 \leq 3 \text{ ou } -3 \leq x+2 \leq -1 \\ &\Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ ou } -5 \leq x \leq -3 \end{aligned}$$

Alors

$$f^{-1}([-2,6]) = [-1,1] \cup [-5,-3]$$

- $f^{-1}(\{-3,6\})$:

$$f^{-1}(\{-3,6\}) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \{-3,6\}\}$$

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= -3 \Rightarrow (x+2)^2 - 3 = -3 \\ &\Rightarrow (x+2)^2 = 0 \\ &\Rightarrow x = -2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(x) &= 6 \Rightarrow (x+2)^2 - 3 = 6 \\ &\Rightarrow (x+2)^2 - 9 = 0 \\ &\Rightarrow (x-1)(x+5) = 0 \\ &\Rightarrow x = 1, x = -5 \end{aligned}$$

Alors

$$f^{-1}(\{-3, 6\}) = \{-2, -5, 1\}$$

5) $f(\mathbb{R}) = [-2, +\infty[$:

$$f(\mathbb{R}) = \{f(x) = y : x \in \mathbb{R}\}$$

On a

$$\begin{aligned} (x+2)^2 &\geq 0 \Rightarrow (x+2)^2 - 3 \geq -3 \\ &\Rightarrow f(x) \geq -3 \\ &\Rightarrow y \in [-3, +\infty[\end{aligned}$$

6) g injective : $\forall x_1, x_2 \in [-2, +\infty[$:

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g(x_2) \Rightarrow (x_1+2)^2 - 3 = (x_2+2)^2 - 3 \\ &\Rightarrow (x_1+2)^2 = (x_2+2)^2 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

g surjective :

$$\forall y \in [-3, +\infty[, \exists x \in [-2, +\infty[: y = (x+2)^2 - 3$$

On a

$$y = (x+2)^2 - 3 \Rightarrow y + 3 = (x+2)^2 \Rightarrow x = \sqrt{y+3} - 2$$

Donc g est bijective et sa fonction réciproque

$$\begin{aligned} g^{-1} &: [-3, +\infty[\to [-2, +\infty[\\ g^{-1}(y) &= \sqrt{y+3} - 2. \end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Structures Algébriques

3.1 Lois de composition interne

D■finition 3.1.1 *Soit E un ensemble non vide, on appelle loi de* composition interne $(l.c.i)$ *sur E tout application de $E \times E$ dans E. Pour tout couple (x, y) on associe donc un élément, noté $x * y$, appelé* composé *de x et de y on écrit*

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x * y \end{array}$$

Autrement dit $*$ loi de composition interne sur E si et seulement si :

$$\forall x, y \in E \times E, x * y \in E.$$

On note aussi une loi de composition interne par : $\oplus, \otimes, \top, \triangle, ...$

Exemple 3.1.1 .

1) *Les lois usuelles $+$ et $\times$ sont des lois de composition interne sur $\mathbb{R}$.*

$$\begin{array}{rcl} \forall (x, y) & \in & \mathbb{R}^2 : x + y \in \mathbb{R} \\ \forall (x, y) & \in & \mathbb{R}^2 : x \times y \in \mathbb{R} \end{array}$$

2) *L'intersection " $\cap$ " et la réunion " $\cup$ " sont des lois de composition interne sur $\mathcal{P}(E)$*

$$\begin{array}{rcl} \forall A,\ B & \in & \mathcal{P}(E) : A \cap B \in \mathcal{P}(E) \\ \forall A,\ B & \in & \mathcal{P}(E) : A \cup B \in \mathcal{P}(E) \end{array}$$

3) *La loi* " $\circ$ " *est une loi de composition sur* $\mathcal{A}(E,E)$ *.*

$$\forall f,\ g \in \mathcal{A}(E,E) : f \circ g \in \mathcal{A}(E,E)$$

4) *La soustraction* " $-$ " *n'est pas une loi de composition interne sur* $\mathbb{N}$*.*

$$\exists x = 1 \in \mathbb{N}, \exists y = 2 \in \mathbb{N} : x - y = -1 \notin \mathbb{N}$$

3.2 Propriété de loi de composition interne

D■finition 3.2.1 *Une loi de composition interne* $*$ *sur* E *est :*

- *commutative si :*

$$\forall x,\ y \in E : x * y = y * x$$

- *associative si :*

$$\forall x, y, z \in E : (x * y) * z = x * (y * z)$$

Exemple 3.2.1 *.*

1) L'addition " $+$ " *et la multiplication* " $\times$ " *dans* $\mathbb{R}$ *sont commutatives et associatives.*

$$\begin{cases} x + y = y + x \\ x \times y = y \times x \end{cases} \qquad \begin{cases} (x + y) + z = x + (y + z) \\ (x \times y) \times z = x \times (y \times z) \end{cases}$$

2) La soustraction " $-$ " *n'est ni commutative ni associative car :*

$x - y \neq y - x$ *et* $(x - y) - z \neq x - (y - z)$ *.*

3) La loi $*$ *définie sur* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ *par* $x * y = x + y - xy$

a) $*$ *est commutative car :* $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *,*

$$\begin{aligned} x * y &= x + y - xy \\ &= y + x - yx \\ &= y * x \end{aligned}$$

b) $*$ *est associative car :* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *,*

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (x + y - xy) * z \\ &= (x + y - xy) + z - (x + y - xy) z \\ &= x + y - xy + z - xz - yz + xyz \ldots\ldots (1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (y + z - yz) \\ &= x + (y + z - yz) - x (y + z - yz) \\ &= x + y + z - yz - xy - xz + xyz \ldots\ldots (2) \end{aligned}$$

comme $(1) = (2)$*, on a* $*$ *est associative.*

Définition 3.2.2 *La loi de compoeition interne* $*$ *admet un* élément neutre $e \in E$ *si :*

$$\exists e \in E, \forall x \in E : x * e = e * x = x$$

Remarque 3.2.1 *Si l'élément neutre pour la loi* $*$ *sur* E *existe, alors il est unique.*

Définition 3.2.3 *Soient* $*$ *une loi de composition interne sur* E *et "e" un élément neutre, on dit qu'un élément* $x \in E$ *admet un symétrique (ou inverse) s'il existe* $\bar{x} \in E$ *tel que :*

$$\forall x \in E, \exists \bar{x} \in E : x * \bar{x} = \bar{x} * x = e.$$

Remarque 3.2.2 .

1) *Si* $*$ *est commutative alors il suffit montrer l'élément neutre et l'élément symétrique à droite :*

$$\begin{aligned} \exists e &\in E, \forall x \in E : x * e = x \\ \forall x &\in E, \exists \bar{x} \in E : x * \bar{x} = e. \end{aligned}$$

2) *Si* $*$ *n'est pas commutative alors on montrer l'élément neutr et l'élément symétrique à droite et à gauche.*

Exemple 3.2.2 .

1) *La loi* " $+$ " *sur* $\mathbb{R}$ *admet* 0 *pour un élément neutre et* $(-x)$ *pour un élément symétrique car :*

$$x + 0 = 0 + x = x \text{ et } x - x = (-x) + x = 0$$

2) *La loi* " $\times$ " *sur* $\mathbb{R}^*$ *admet* 1 *pour un élément neutre et* $\left(\frac{1}{x}\right)$ *pour un élément symétrique car :*

$$x \times 1 = 1 \times x = x \text{ et } x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1.$$

3) *La loi* " $\cup$ " *sur* $\mathcal{P}(E)$ *admet* $\emptyset$ *pour un élément neutre car :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) : A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A.$$

4) *La loi* " $\cap$ " *sur* $\mathcal{P}(E)$ *admet* E *pour un élément neutre car :*

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) : A \cap E = E \cap A = A.$$

5) *La loi* $*$ *définie sur* $\mathbb{R}\diagdown\{1\}$ *par* $x*y=x+y-xy$

a) *<u>L'élément neutre</u> :*

Comme la loi $*$ *est commutative alors,* $\exists e\in\mathbb{R}\diagdown\{1\},\forall x\in\mathbb{R}\diagdown\{1\}$

$$\begin{aligned} x*e &= x \\ &\Rightarrow x+e-xe=x \\ &\Rightarrow e(1-x)=0 \\ &\Rightarrow e=0 \end{aligned}$$

Donc, $e=0$ *l'élément neutre de* $\mathbb{R}\diagdown\{1\}$ *pour* $*$.

b) *<u>L'élément symétrique</u> :*

Comme la loi $*$ *est commutative alors,* $\forall x\in\mathbb{R}\diagdown\{1\},\exists\bar{x}\in\mathbb{R}\diagdown\{1\}$

$$\begin{aligned} x*\bar{x} &= 0 \\ &\Rightarrow x+\bar{x}-x\bar{x}=0 \\ &\Rightarrow \bar{x}=-\frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

Donc, $\bar{x}=-\frac{x}{1-x}$ *l'élément symétrique.*

3.3 Groupe et sous-groupe

3.3.1 Groupe

D■finition 3.3.1 (**Groupe**) *Soit* G *un ensemble non vide et "*$*$*" une loi de composition interne sur* G*. On dit que* $(G,*)$ *est un groupe* (*structure de groupe*)*si :*

- *La loi* $*$ *est associative*
- *La loi* $*$ *admet un élément neutre*
- *tout élément de* G *admet un symétrique pour la loi* $*$.

Si de plus, la loi $*$ *est commutative sur* G*, on dit que* G *est un groupe commutatif* (*ou abélien*).

Exemple 3.3.1 .

1) $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$ *et* $(\mathbb{C}^*,\times)$ *sont des groupes commutatifs.*

1) $(\mathbb{N},+)$ *n'est pas un groupe car,les éléments de* $\mathbb{N}$ *n'est pas un symetréque dans* $\mathbb{N}$.

2) $(\mathbb{Z},\times)$ *n'est pas un groupe car* 2 *n'est pas inversibles de* $\mathbb{Z}$.

3) *La loi* $*$ *définie sur* $\mathbb{R}\diagdown\{1\}$ *par* $x*y=x+y-xy$. *On a* $(\mathbb{R}\diagdown\{1\},*)$ *est un groupe abélien* (*d'aprés l'exemple précédnt*).

Exercice 3.3.1 *On munit $\mathbb{Z}$ par la loi de composition $*$ définie par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x * y = x + y + x^2 y$$

Montrer que $*$ est une loi de composition interne, puis étudier, pour cette loi, la commutativité, l'associativité, l'existence de l'élément neutre et l'existence du symétrique.

Solution. .

i) La loi $*$ n'est pas commutative car $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} x * y &= x + y + x^2 y \\ y * x &= y + x + y^2 x \end{aligned}$$

ii) La loi $*$ est n'est pas associative par exemple, $x = 1, y = 2, z = 3$, on a

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= (1 * 2) * 3 = 90 \\ x * (y * z) &= 1 * (2 * 3) = 35 \end{aligned}$$

iii) L'élément neutre e, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} : x * e = e * x = x,$$

Alors,

$$\begin{aligned} x * e &= x \Rightarrow x + e + x^2 e = x \\ &\Rightarrow e\left(1 + x^2\right) = 0 \\ &\Rightarrow e = 0 \end{aligned}$$

et

$$e * x = 0 * x = 0 + x + x^2 0 = x$$

Donc, $e = 0$ est l'élément neutre de la loi $*$.

2) L'élément symétrique $\bar{x}$ pour la loi $*$

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \exists \bar{x} \in \mathbb{Z}, x * \bar{x} = \bar{x} * x = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} x * \bar{x} &= 0 \Rightarrow x + \bar{x} + x^2 \bar{x} = 0 \\ &\Rightarrow \bar{x}\left(1 + x^2\right) + x = 0 \\ &\Rightarrow \bar{x} = \frac{-x}{1 + x^2} \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Alors, l'élément symétrique n'existe pas. ■

Exercice 3.3.2 *Soit $\triangle$ la loi de composition définie sur$\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : x \triangle y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Montrer que $\triangle$ est commutative, associative et existence l'élément neutre

Montrer que aucune élément de $\mathbb{R}_+^*$ n'a de symétrique pour $\triangle$.

Solution. .

1) $*$ commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x \triangle y = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + x^2} = y * x$$

Donc $\triangle$ est commutative.

2) $\triangle$ associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}(x \triangle y) \triangle z &= \sqrt{x^2 + y^2} \triangle z \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}x \triangle (y \triangle z) &= x \triangle \sqrt{y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{y^2 + z^2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.\end{aligned}$$

Donc $\triangle$ est associative.

3) Soit $e \in \mathbb{R}_+^*$, l'élément neutre de la loi $\triangle$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}x \triangle e = x &\Rightarrow \sqrt{x^2 + e^2} = x \\ &\Rightarrow x^2 + e^2 = x^2 \\ &\Rightarrow e = 0.\end{aligned}$$

Comme $\triangle$ est commutative donc $e = 0 \in \mathbb{R}_+^*$ l'élément neutre de la loi $\triangle$.

2) Soit $\overline{x} \in \mathbb{R}_*^+$, l'élément symétrique $x \in \mathbb{R}_+^*$ par la loi $\triangle$, alors :

$$\begin{aligned}x \triangle \overline{x} = 0 &\Rightarrow \sqrt{x^2 + \overline{x}^2} = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + \overline{x}^2 = 0 \\ &\Rightarrow \overline{x} = -x \notin \mathbb{R}_+^*\end{aligned}$$

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ aucune élément symétrique par la loi $\triangle$. ■

3.3.2 Sous-groupe

D■finition 3.3.2 (**Sous-groupe**)*Soient* $(G, \top)$ *un groupe et* $H \subset G$*. On dit que* $(H, *)$ *est un sous-groupe de* $(G, *)$ *si :*

1) $H \neq \varnothing$. ($e \in H$ *l'élément neutre de* G)
2) $\forall x, y \in H : x * y \in H$.
3) $\forall x \in H : \bar{x} \in H$. ($\bar{x}$ *l'élément symétrique de* G) .

Exemple 3.3.2 .

1) $(G, *)$ *et* $(\{e\}, *)$ *sont des sous groupes du groupe* $(G, *)$ *(où e l'élément neutre de G).*
2) $(\mathbb{Z}, +)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, *)$ *car :*
   1) $e = 0 \in \mathbb{Z}$
   2) $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ *alors* $x + y \in \mathbb{Z}$
   3) $\forall x \in \mathbb{Z}$ *alors* $\bar{x} = (-x) \in \mathbb{Z}$.

Exemple 3.3.3 .

Soit $n \in \mathbb{N}$, $H = \{n \times p : p \in \mathbb{Z}\}$ *un sous groupe de* $(\mathbb{Z}, +)$ *car :*

1) $0 \in H$ *car :* $\exists p = 0 : 0 = n \times 0$
2) $\forall x, y \in H$, *on a :*

$$\left\{\begin{array}{l} \exists p_1 \in \mathbb{Z} : x = n \times p_1 \\ \exists p_2 \in \mathbb{Z} : y = n \times p_2 \end{array}\right. \Rightarrow \quad x + y = n \times (p_1 + p_2)$$

$$\Rightarrow \quad x + y = n \times \acute{p} \in H \ \ (\text{où } \acute{p} = p_1 + p_2 \in \mathbb{Z}\ )$$

3) $\forall x \in H$, *on a :*

$$\exists p \in \mathbb{Z} : x = n \times p \Rightarrow (-x) = n \times (-p) \in H \ \ (\text{car } (-p) \in \mathbb{Z}).$$

Alors, H *est un sous groupe de* $(\mathbb{Z}, +)$.

Proposition 3.3.1 $(H, *)$ *est un sous-groupe de* $(G, *)$ *ssi*

$$\left\{\begin{array}{c} 1)\ H \neq \varnothing. (e \in H \text{ l'élément neutre de } G) \\ 2)\ \forall x, y \in H : x * \bar{y} \in H. (\text{où } \bar{y} \text{ est l'élément symétrique de } y) \end{array}\right.$$

Remarque 3.3.1 .

1) *L'intersection de deux sous groupes est un sous groupe.*

En effet, soient H_1 *et* H_2 *deux sous groupes de* $(G, *)$

i) $e \in H_1$ *et* $e \in H_2 \Rightarrow e \in H_1 \cap H_2$

ii) $\forall x, y \in H$, *on a :*

$$\begin{aligned} x, y &\in H_1 \text{ et } x, y \in H_2 \\ &\Rightarrow x * y \in H_1 \text{ et } x * y \in H_2 \\ &\Rightarrow x * y \in H_1 \cap H_2 \end{aligned}$$

iii) $\forall x \in H$, *on a :*

$$\begin{aligned} x &\in H_1 \text{ et } x \in H_2 \\ &\Rightarrow \bar{x} \in H_1 \text{ et } \bar{x} \in H_2 \\ &\Rightarrow \bar{x} \in H_1 \cap H_2 \end{aligned}$$

Donc, $H_1 \cap H_2$ *est un sous groupe de* $(G, *)$.
2) *La réunion de deux sous groupes n'est pas un sous groupe.*
En effet, posons $H_1 = 2\mathbb{Z}$ *et* $H_2 = 5\mathbb{Z}$ *deux sous groupes de* $(\mathbb{Z}, +)$.
On a, $2 \in H_1 \cup H_2$ *et* $5 \in H_1 \cup H_2$ *mais* $2 + 5 \notin H_1 \cup H_2$.
Donc, $H_1 \cup H_2$ *n'est pas un sous groupe de* $(\mathbb{Z}, +)$.

3.4 Morphisme de groupes

D■finition 3.4.1 *Soient* $(G, \oplus)$ *et* $(G', \otimes)$ *deux groupes. Une application* $f : G \to G'$ *est un* morphisme (*ou* homomorphisme) *de groupes si :*

$$\forall (x, y) \in G^2 : f(x * y) = f(x) \top f(y) .$$

• *Si* f *est bijective alors on dit que* f *est un* isomorphisme *de* $(G, *)$ *dans* $(G', \top)$.

• *Si* $G = \acute{G}$*alors on dit que* f *est un* endomorphisme.

• *Si* f *est un endomorphisme et bijective alors on dit que* f *est un* automorphisme.

Exemple 3.4.1 *Soit les groupes* $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ *et* $(\mathbb{R}, +)$. *Soit l'application définie*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \ln(x). \end{aligned}$$

On a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* : f(x + y) = \ln(x.y) = \ln x + \ln y = f(x) + f(y) .$$

Donc f *est un homomorphisme de groupes.*

Proposition 3.4.1 *Soit $f : (G, *) \to (G', \top)$ un morphisme de groupes de $(G, *)$ dans $(G', \top)$ alors :*

1) $f(e) = é$ $\left(\text{où } e \text{ est l'élément neutre de } G \text{ et } é \text{ l'élément neutre de } \acute{G}\right)$.

2) $\forall x \in G : f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$, où $\bar{x}$ est l'élément symétrique de G et $\overline{f(x)}$ l'élément symétrique de $\acute{G}$.

Exercice 3.4.1 *On définit sur l'ensemble $G =]2, +\infty[$ la loi $\triangle$ tel que :*

$$\forall x, y \in]2, +\infty[: x \triangle y = (x-2)(y-2) + 2.$$

1) Montrer que $\triangle$ est une lois de composition interne dans G.
2) Montrer que $(G, \triangle)$ est un groupe abélien.
Soit h l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ vers G tel que :

$$h(x) = \frac{2x+1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

3) Montrer que h est un morphisme de $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ dans $(G, \triangle)$.

Solution. .

1) $\triangle$ est une lois de composition interne dans G si $\forall x, y \in G, x \triangle y \overset{?}{\in} G$
On a

$$\begin{aligned} x, y &\in G =]2, +\infty[\Rightarrow x \geq 2 \text{ et } y \geq 2 \\ &\Rightarrow x - 2 \geq 0 \text{ et } y - 2 \geq 0 \\ &\Rightarrow (x-2)(y-2) \geq 0 \\ &\Rightarrow (x-2)(y-2) + 2 \geq 2 \end{aligned}$$

Alors, $x \triangle y \in G$.
2) $\underline{(G, \triangle) \text{ est un groupe abélien}}$:
1) $\underline{* \text{ commutative}}$: $\forall x, y \in G$:

$$x \triangle y = (x-2)(y-2) + 2 = (y-2)(x-2) + 2 = y \triangle x$$

Donc $*$ est commutative.
2) $\underline{* \text{ associative}}$: $\forall x, y, z \in G$:

$$\begin{aligned} (x \triangle y) \triangle z &= [(x-2)(y-2) + 2] \triangle z \\ &= ((x-2)(y-2) + 2 - 2)(z-2) + 2 \\ &= (x-2)(y-2)(z-2) + 2 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
x \triangle (y \triangle z) &= x \triangle (x-2)\left((y-2)(z-2)+2\right) \\
&= (x-2)\left((y-2)(z-2)+2-2\right)+2 \\
&= (x-2)(y-2)(z-2)+2
\end{aligned}$$

Donc $*$ est associative.

3) Soit $e \in G$, l'élément neutre de la loi $*$, $\forall x \in G$,

$$\begin{aligned}
x \triangle e = x &\Rightarrow (x-2)(e-2)+2 = x \\
&\Rightarrow (x-2)(e-2)+2-x = 0 \\
&\Rightarrow (x-2)(e-3) = 0 \\
&\Rightarrow e = 3.
\end{aligned}$$

Comme $*$ est commutative donc $e = 3 \in G$, l'élément neutre de la loi $\triangle$.

4) Soit $\overline{x} \in G$, l'élément symétrique $x \in G$ par la loi $\triangle$, alors :

$$\begin{aligned}
x \triangle \overline{x} = 3 &\Rightarrow (x-2)(\overline{x}-2)+2 = 3 \\
&\Rightarrow \overline{x}-2 = \frac{1}{x-2} \\
&\Rightarrow \overline{x} = \frac{2x-3}{x-2}
\end{aligned}$$

Comme $*$ est commutative donc $\forall x \in G$, admet un l'élément symétrique $\overline{x} = \frac{2x-3}{x-2} \in G$, par la loi $\triangle$.

Alors d'aprés $1), 2), 3)$ et 4) on a, $(G, \triangle)$ est un groupe abélien.

3) Soit

$$h(x) = \frac{2x+1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

h est un morphisme de $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ dans $(G, \triangle)$ si $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

$$h(x \times y) = \frac{2xy+1}{xy} \ldots\ldots\ldots (1)$$

et

$$\begin{aligned}
h(x) \triangle h(y) &= (h(x)-2)(h(y)-2)+2 \\
&= \left(\frac{2x+1}{x}-2\right)\left(\frac{2y+1}{y}-2\right)+2 \\
&= \frac{2xy+1}{xy} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)
\end{aligned}$$

Donc $(1) = (2)$ alors, h est un morphisme de groupes. ■

3.5 Anneau et sous-anneau

Définition 3.5.1 *Soient* $*$ *et* $\top$ *deux lois de composition interne de* E.

- *On dit que la loi* $\top$ *est distributive à gauche par rapport à loi* $*$ *si*

$$\forall (x, y, z) \in E : x \top (y * z) = (x \top y) * (x \top z) .$$

- *On dit que la loi* $\top$ *est distributive à droite par rapport à* $*$ *si*

$$\forall x, y, z \in E : (x * y) \top z = (x \top z) * (y \top z) .$$

- *On dit que la loi* $\top$ *est distributive par rapport à* $*$ *si elle est distributive à la fois à gauche et à droite par rapport à* $*$.

Remarque 3.5.1 *Si la loi* $\top$ *est commutative. La loi* $\top$ *est distributive par rapport à* $*$ *si elle est distributive à gauche ou bien à droite par rapport à* $*$.

Exemple 3.5.1 1) *la multiplication* $\times$ *est distributive par rapport à l'addition* $+$, *dans* $\mathbb{R}$.$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z) \\ (x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z) \end{cases}$$

Définition 3.5.2 (***Anneau***) *Soient* $*$ *et* $\top$ *deux lois de composition interne d'un ensemble* A.

On dit que $(A, *, \top)$ *est un anneau* (*anneau unitaire*) *si :*

1. $(A, *)$ *est un groupe commutatif,*
2. *la loi* $\top$ *est associative sur*A,
3. $\top$ *distributive par rapport à* $*$,
4. *l'ensemble* A *admet un élément neutre pour la loi* $\top$.

De plus, si la loi $\top$ *est commutative sur* A *on dit que* $(A, *, \top)$ *est un* ***anneau commutatif***.

Exemple 3.5.2 $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *est un anneau commutatif, en effet*

- $(\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe commutatif,*
- $\times$ *est associative :*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : (x \times y) \times z = x \times (y \times z) ,$$

- $\times$ *est commutative :*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : x \times y = y \times z,$$

- $\times$ *distributive par rapport à* $+$ *:*

$$\forall x, y, z \in \mathbb{Z} : x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)\,,$$

- *l'ensemble* $\mathbb{Z}$ *admet un élément neutre* 1 *pour la loi* $\times$.

D■finition 3.5.3 *Soit* $(A, *, \top)$ *un anneau et* B *un sous-ensemble non vide de* A. *On dit que* $(B, *, \top)$ *est un* ***sous-anneau*** *de* $(A, *, \top)$ *si :*
- $(B, *)$ *est un sous-groupe de* $(A, *)$,
- $e_\top \in B$, (*où* $e_\top$ *l'élément neutre par rapport à* $\top$),
- $\forall x, y \in B : x \top y \in B$.

Exemple 3.5.3 $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *est un sous-anneau de l'anneau* $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

Exercice 3.5.1 *Soit l'énsemble* $A = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$.
Montrons que $(A, +, \times)$ *est un sous-anneau de* $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Solution.
a) On a $0 \in A$ car $0 = 0 + 0\sqrt{2}$
b) $\forall x, y \in A$, on a

$$\begin{aligned} \exists a, b &\in \mathbb{Z} : x = a + b\sqrt{2} \\ \exists a', b' &\in \mathbb{Z} : y = a' + b'\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x + \overline{y} &= x - y \\ &= a + b\sqrt{2} - a' - b'\sqrt{2} \\ &= (a - a') + (b - b')\sqrt{2} \\ &= a'' + b''\sqrt{2} \end{aligned}$$

avec $a'' = a - a' \in \mathbb{Z}$ et $b'' = b - b' \in \mathbb{Z}$, alors

$$x + \overline{y} \in A.$$

2) On a $1 \in A$ car $1 = 1 + 0\sqrt{2}$

3) $\forall x, y \in A$,

$$\begin{aligned} x \times y &= \left(a + b\sqrt{2}\right)\left(a' + b'\sqrt{2}\right) \\ &= aa' + ab'\sqrt{2} + ba'\sqrt{2} + 2bb' \\ &= aa' + 2bb' + \left(ab' + ba'\right)\sqrt{2} \\ &= a'' + b''\sqrt{2} \end{aligned}$$

avec $a'' = aa' + 2bb' \in \mathbb{Z}$ et $b'' = ab' + ba' \in \mathbb{Z}$, alors

$$x \times y \in A.$$

Donc $(A, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$. ■

3.6 Corps et sous-corps

D■finition 3.6.1 ***(corps)*** *Soit K un ensemble non vide muni de deux lois $\top$ et $*$. On dit que $(K, *, \top)$ est un corps si :*
i) $(K, *)$ est un groupe commutatif avec l'élément neutre e_*.
ii) $(K \backslash \{e_\top\}, \top)$ est un groupe.
iii) La loi $\top$ est distributive par rapport à $*$.

Remarque 3.6.1 *Si la loi $\top$ est commutative, on dit que $(K, *, \top)$ est un corps commutatif.*

Exemple 3.6.1 $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un corps commutatif.car,*
i) $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.
ii) $(\mathbb{R} \backslash \{0\}, \times)$ est un groupe commutatif.
iii) La loi $\times$ est distributive par rapport à $+$.

D■finition 3.6.2 *Soient $(K, *, \top)$ un corps et H un sous-ensemble non vide de K. On dit que $(H, *, \top)$ est un* ***sous-corps*** *de $(K, *, \top)$ si :*
i) $(H, *)$ est un sous-groupe du groupe $(K, *)$.
ii) $(H \backslash \{e_\top\}, \top)$ est un sous-groupe du groupe $(K \backslash \{e_\top\}, \top)$.

Exemple 3.6.2 $(\mathbb{Q}, +, \times)$ *est un sous-corps du corps* $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Algèbre II

(Algèbre linéaire 1)

Chapitre 4

Nombres Complexes

4.1 Construction des nombres complexes

D■finition 4.1.1 *On appelle l'ensemble des nombre complexes, noté* $\mathbb{C}$, *l'ensemble des nombres* z *de la forme :*

$$z = x + iy \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1.$$

Le nombre réel x *s'appelle la partie réelle de* z *notée :* $\mathrm{Re}(z)$.

Le nombre réel y *s'appelle la partie imaginaire de* z *noté :* $\mathrm{Im}(z)$.

Cette forme $z = x + iy$ *est appelé forme algébique.*

D■finition 4.1.2 .

1) *Si* $y = 0$ *alors,* z *est un nombre* ***réel pur****.*
2) *Si* $x = 0$ *alors,* z *est un nombre* ***imaginaire pur****.*

4.2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Proposition 4.2.1 *Soient* $z = x + iy$ *et* $z' = x' + iy'$ *alors :*

1) $z = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *et* $y = 0$
2) $z = z' \Leftrightarrow x = x'$ *et* $y = y'$
3) $z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$
4) $z \times z' = (x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Exemple 4.2.1 *Soit* $z = 3 + 4i$ *et* $z' = 1 - 5i$ *alors on a :*

$$\begin{aligned} z + \acute{z} &= (3 + 4i) + (1 - 5i) = 4 - i \\ z \times \acute{z} &= (3 + 4i) \times (1 - 5i) = 23 - 11i \\ z^2 &= (3 + 4i)^2 = 3^2 + (4i)^2 + 2 \times 3 \times 4i = 7 + 24i \end{aligned}$$

Exemple 4.2.2 *Soit* $z = 1 - 2i$ *et* $z' = -2 - i$ *alors on a :*

$$\begin{aligned} z + \acute{z} &= (1-2i) + (-2-i) = -1 - 3i \\ z \times \acute{z} &= (1-2i)(-2-i) = -4 + 3i \\ z^2 &= (1-2i)^2 = 1^2 + (2i)^2 - 2 \times 1 \times 2i = -3 - 4i \end{aligned}$$

Remarque 4.2.1 $(\mathbb{C}, +, \times)$ *est un corps commutatif.*

4.3 Conjugué d'un nombre complexe

D■finition 4.3.1 *Soit* $z = x + iy$ *un nombre complexe. On appelle le* ***conjugué*** *de* z*, le nombre noté* $\overline{z}$ *tel que*

$$\overline{z} = x - iy.$$

Exemple 4.3.1 *Soit* $z_1 = 3 + 4i$*,* $z_2 = 1 - 5i$ *et* $z_3 = -\sqrt{2}i$

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= \overline{3 + 4i} = 3 - 4i \\ \bar{z}_2 &= \overline{1 - 5i} = 1 + 5i \\ \bar{z}_3 &= \overline{-\sqrt{2}i} = +\sqrt{2}i \end{aligned}$$

Proposition 4.3.1 *Soit* $z, \acute{z}$ *deux nombres complexes. Alors :*

$$\begin{aligned} \overline{z + \acute{z}} &= \overline{z} + \overline{\acute{z}} \\ \overline{z \times \acute{z}} &= \overline{z} \times \overline{\acute{z}} \\ \overline{\left(\frac{z}{\acute{z}}\right)} &= \frac{\overline{z}}{\overline{\acute{z}}} \text{ avec } \acute{z} \neq 0. \\ \overline{z^n} &= \overline{z}^n \text{ , } \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} z + \overline{z} &= 2 \operatorname{Re}(z) \\ z - \overline{z} &= 2i \operatorname{Im}(z) \\ z \times \overline{z} &= (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \end{aligned}$$

Preuve. soit $z = x + iy$, $\acute{z} = \acute{x} + i\acute{y}$ deux nombres complexes

• $\overline{z+\acute{z}} = \overline{z} + \overline{\acute{z}}$

$$\begin{aligned}
\overline{z+\acute{z}} &= \overline{(x+iy)+(\acute{x}+i\acute{y})} \\
&= \overline{(x+\acute{x})+i(y+\acute{y})} \\
&= (x+\acute{x})-i(y+\acute{y}) \\
&= (x-iy)+(\acute{x}-i\acute{y}) \\
&= \overline{z}+\overline{\acute{z}}
\end{aligned}$$

• $\overline{z \times \acute{z}} = \overline{z} \times \overline{\acute{z}}$

$$\begin{aligned}
\overline{z \times \acute{z}} &= \overline{(x+iy)\times(\acute{x}+i\acute{y})} \\
&= \overline{(x\acute{x}-y\acute{y})+i(x\acute{y}+y\acute{x})} \\
&= (x\acute{x}-y\acute{y})-i(x\acute{y}+y\acute{x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{z} \times \overline{\acute{z}} &= (x-iy)\times(\acute{x}-i\acute{y}) \\
&= (x\acute{x}-y\acute{y})-i(x\acute{y}+y\acute{x})
\end{aligned}$$

• $\overline{\left(\frac{z}{\acute{z}}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{\acute{z}}}$ avec $\acute{z} \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z}{\acute{z}}\right)} &= \overline{\left(\frac{x+iy}{\acute{x}+i\acute{y}}\right)} \\
&= \frac{\overline{x+iy}}{\overline{\acute{x}+i\acute{y}}} \\
&= \frac{x-iy}{\acute{x}-i\acute{y}} \\
&= \frac{\overline{z}}{\overline{\acute{z}}}
\end{aligned}$$

• $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Par récurrence
• pour $n = 1$: $\overline{z} = \overline{z}$
• $\forall n \in \mathbb{N}^*$: posons $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, démontrons $\overline{z^{n+1}} = \overline{z}^{n+1}$
on a $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = \overline{z}^n \times \overline{z} = \overline{z}^{n+1}$.
• $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$

$$\begin{aligned}
z+\overline{z} &= (x+iy)+(x-iy) \\
&= 2x = 2\,\mathrm{Re}\,(z)
\end{aligned}$$

- $z - \bar{z} = \mathrm{Im}\,(z)$

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= (x + iy) - (x - iy) \\ &= 2iy = 2\,\mathrm{Im}\,(z) \end{aligned}$$

- $z \times \bar{z} = (\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2$

$$\begin{aligned} z \times \bar{z} &= (x + iy) \times (x - iy) \\ &= x^2 - (iy)^2 \\ &= x^2 + y^2 = (\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2 . \end{aligned}$$

■

Exemple 4.3.2 *Trouver la forme algébrique de* $\frac{1+i}{2-i}$ *:*

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right) = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1+3i}{2^2+1^2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$$

4.4 Module d'un nombre complexe

D■finition 4.4.1 *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle le* ***module*** *de z, le nombre réel positif noté $|z|$ tel que*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exemple 4.4.1 *Soit $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 - 5i$*

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ |z_2| &= \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{11} \end{aligned}$$

Remarque 4.4.1

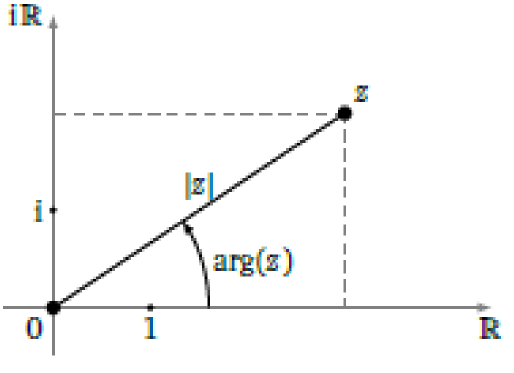
$$\begin{aligned} z \times \bar{z} &= |z|^2 \\ \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |-z| &= |z| \\ |\bar{z}| &= |z| \end{aligned}$$

4.5 Interprétation géométrique d'un nombre complexe

D■finition 4.5.1 *Soit $z = x + iy$ un nombre commplexe, on peut faire correspondre un point $M(x, y)$ dans un plan orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On dit que z est l'affixe de M. On note $M(z)$ .où $|z|$ est la distance OM θ l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ qui s'appelle **argument** de z, noté $\arg(z)$ et on a*

$$\arg(z) = \theta : \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{|z|}. \end{cases}$$



Exemple 4.5.1 *Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$, on a*

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ |z_2| &= \sqrt{1+3} = 2. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \arg(z_1) &: \begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4} \\ \arg(z_2) &: \begin{cases} \cos(\theta_2) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Remarque 4.5.1 *L'interprétation géométrique de $\overline{z}$ est le point $M'(\overline{z})$ est le symétrique du point $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses.*

4.6 Forme trigonométrique

D■finition 4.6.1 *On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe $z = x + iy$, l'écriture suivante :*

$$z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right),$$

avec

$$r = |z| \quad et \quad \theta = \arg(z).$$

Exemple 4.6.1 .

1) *Soit $z = 1 + i$, on a*

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \theta &= \arg(z) : \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

On déduit la forme trigonométrique de z,

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

2) *Soit $z = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$, on a la forme algébrique de z est*

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ z &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Proposition 4.6.1 *Soit z un nombre complexe, on a les relations suivantes :$\times$*

$$\begin{aligned} |-z| &= |z| \ \ et \ \arg(-z) = \arg(z) + \pi \\ |\bar{z}| &= |z| \ \ et \ \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \end{aligned}$$

Proposition 4.6.2 *Soit z, z' deux nombres complexes, on a les relations suivantes :*

$$\begin{aligned} |z \times z'| &= |z| \times |z'| & et \quad \arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(\acute{z}) \\ \left|\frac{z}{z'}\right| &= \frac{|z|}{|z'|},\ z' \neq 0.\ et & \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(\acute{z}) \\ |z^n| &= |z|^n \ , n \in \mathbb{N}^* & et \quad \arg(z^n) = n\arg(z) \end{aligned}$$

Preuve. Soit $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, $z' = |\acute{z}|(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$ deux nombres complexes (forme trigonométrique).

1) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$

$$\begin{aligned} z \times z' &= |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \times |\acute{z}|(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= |z| \times |\acute{z}| [\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \\ &\quad + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta'))] \\ &= |z| \times |\acute{z}| (\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')). \end{aligned}$$

2) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$.et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$.

$$\begin{aligned} \frac{z}{z'} &= \frac{|z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))}{|\acute{z}|(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))} \times \frac{\cos(\theta') - i\sin(\theta')}{\cos(\theta') - i\sin(\theta')} \\ &= \frac{|z|}{|\acute{z}|} \left(\frac{\cos(\theta)\cos(\theta') + \sin(\theta)\sin(\theta')}{\cos^2(\theta') + \sin^2(\theta')} \right. \\ &\quad \left. + i\frac{\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta')}{\cos^2(\theta') + \sin^2(\theta')} \right) \\ &= \frac{|z|}{|\acute{z}|}(\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')) \end{aligned}$$

3) $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)$ (Par récurrance)

a) $|z^n| = |z|^n$

pour $n = 1$: $|z^1| = |z|^1$

posons $|z^n| = |z|^n$, montrons $|z^{n+1}| = |z|^{n+1}$

$$\begin{aligned} \left|z^{n+1}\right| &= |z^n \times z| \\ &= |z^n| \times |z| \\ &= |z|^n \times |z| \\ &= |z|^{n+1} \end{aligned}$$

b) $\arg(z^n) = n\arg(z)$, $n \in \mathbb{N}^*$

pour $n = 1$: $\arg(z^1) = 1\arg(z)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: posons $\arg(z^n) = n\arg(z)$, démontrons $\arg(z^{n+1}) = (n+1)\arg(z)$

on a

$$\begin{aligned} \arg\left(z^{n+1}\right) &= \arg(z^n \times z) \\ &= \arg(z^n) + \arg(z), 1) \text{ d'aprés b)} \\ &= (n+1)\arg(z). \end{aligned}$$

■

Exercice 4.6.1 *soit les nombres complexes* $z = 1 + i\sqrt{3}$, $z' = 1 - i$

1) Mettre sous la forme trigonométrique : $z, z', z \times z', \frac{z}{z'}, z^2$

2) Mettre sous la forme algébrique $z \times z'$

Solution. .

1)

$$\begin{aligned} z &= 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})), z' = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) - i\sin(\frac{\pi}{4})), \\ z \times z' &= 2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{\pi}{12})),\ \frac{z}{z'} = \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12})), \\ z^2 &= z \times z = 4(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})) \end{aligned}$$

2)

$$z \times z' = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1).$$

■

4.7 Forme exponentielle

D■finition 4.7.1 *Soit* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, *on pose* $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

On appelle ***forme exponentielle*** *d'un nombre complexe z la forme :*

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec} \quad r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \arg(z)\,.$$

Exemple 4.7.1 *La forme exponentielle de nombre complexe* $z = 1 + i$ *est*

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

La forme exponentielle de nombre complexe $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$ *est*

$$z = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

4.8 Formule d'Euler

D■finition 4.8.1 *Pour tout réel* θ, *on a :*

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

Exemple 4.8.1 *En utilisant la formule d'Euler, linéariser* $\sin^3(\theta)$ *et* $\cos^4(\theta)$

$$\begin{aligned}
\sin^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\
&= -\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3 - 3\left(e^{i\theta}\right)^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^2 - \left(e^{-i\theta}\right)^3\right) \\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{i3\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-i3\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3\theta}-e^{-i3\theta}}{2i} - 3\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\cos^4(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{16}\left(\left(e^{i\theta}\right)^4 + 4\left(e^{i\theta}\right)^3 e^{-i\theta} + 6\left(e^{i\theta}\right)^2\left(e^{-i\theta}\right)^2 + 4e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}\right)^3 + \left(e^{-i\theta}\right)^4\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(e^{i4\theta} + 4e^{i2\theta} + 6 + 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}}{2} + 4\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2} + \frac{6}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3\right)
\end{aligned}$$

4.9 Formule de moivre

Proposition 4.9.1 *Pour tout réel* θ *et tout entier* n*, on a*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Preuve. On va montrer $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ (par récurrence)

1) Pour $n = 0$: $\begin{cases} (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^0 = 1 \\ \cos(0\times\theta) + i\sin(0\times\theta) = 1 \end{cases}$ vraie

2) On suppose $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ et montrons que

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^{n+1}=\cos((n+1)\theta)+i\sin((n+1)\theta)$$

$$\begin{aligned}(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^{n+1} &= (\cos(\theta)+i\sin(\theta))^{n}(\cos(\theta)+i\sin(\theta))\\ &= (\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))(\cos(\theta)+i\sin(\theta))\\ &= \cos(n\theta)\cos(\theta)-\sin(n\theta)\sin(\theta)\\ &\quad +i(\cos(n\theta)\sin(\theta)+\sin(n\theta)\cos(\theta))\\ &= \cos(n\theta+\theta)+i\sin(n\theta+\theta)\\ &= \cos((n+1)\theta)+i\sin((n+1)\theta)\end{aligned}$$

Alors, $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^{n}=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$. ■

Exemple 4.9.1 *En utilisant la formule de Moivre, on calcule* $\cos(3\theta)$ *et* $\sin(3\theta)$ *en fonction de* $\cos(\theta)$ *et* $\sin(\theta)$.

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^{3}=\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)$$

$$\begin{aligned}(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^{3} &= \cos^3(\theta)+i3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-i\sin^3(\theta)\\ &= \left[\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)\right]+i\left[3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta)\right]\\ &= \cos(3\theta)+i\sin(3\theta)\end{aligned}$$

Alors, $\begin{cases}\cos(3\theta)=\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)\\ \sin(3\theta)=3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta)\end{cases}$.

4.10 Racine carrée d'un nombre complexe

D■finition 4.10.1 *Soit* $Z=a+ib$ *un nombre complexe. Si le nombre* $z=x+iy$ *est une racine carrée de* Z *c-à-d* $\sqrt{Z}=z\Leftrightarrow Z=z^2$ *alors :*

1) $\underline{Si\ Z=0}$ *donc* $z=0$.
2) $\underline{Si\ Z=c}$ $(c\in\mathbb{R})$ *donc,*

$$\begin{cases} z=\pm\sqrt{c} \text{ si } c>0\\ z=\pm i\sqrt{c} \text{ si } c<0\end{cases}$$

3) $\underline{Si\ Z=a+ib}$ *avec* $b\neq 0$.
Soit $z=x+iy$ *racine carrée de* Z

$$\begin{cases} z^2=Z\\ |z^2|=|Z|\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2ixy=a+ib\\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \dots\dots\dots\dots (1)\\ 2xy=b \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)\\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \dots\dots (3)\end{cases}$$

Alors,
$(1) + (3)$ *on a :* $2x^2 = a + \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}$
$(3) - (1)$ *on a :* $2y^2 = b + \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}$
(2) *on a :* $\begin{cases} si\ 2xy > 0 \text{ alors, } x \text{ et } y \text{ sont de même signe.} \\ si\ 2xy < 0 \text{ alors, } x \text{ et } y \text{ sont des signes différents.} \end{cases}$

Exemple 4.10.1 *Soit $Z = 3 - 4i$, on va calculer les racines carrées de Z on a :*
Soit $z^2 = Z \Leftrightarrow (x+iy)^2 = 3 - 4i$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ 2xy = -4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \dots\dots (3) \end{cases}$$

$(1) + (3) : 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 3.$
$(3) - (1) : 2y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1.$
$(2) : 2xy = -4 < 0$ *alors, x et y sont des signes différents*
Donc, $z_1 = 3 - i$,$z_2 = -3 + i$.

Exemple 4.10.2 *On va calculer les racines carrées de nombres complexe $Z = -2$*

On cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = Z$. On a

$$\begin{aligned} z^2 &= -2 \Rightarrow z^2 = i^2 2 \\ &\Rightarrow z = \sqrt{i^2 2} \\ &\Rightarrow z_1 = i\sqrt{2} \text{ et } z_2 = -i\sqrt{2} \end{aligned}$$

4.11 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

D■finition 4.11.1 *Soit $Z = a + ib$ un nombre complexe.*
Pour déterminer les racines $n -$ ièmes de Z on a :
1) *On écrit Z sous forme exponentielle* $Z = re^{i(\theta+2k\pi)}$,
2) z_k *les racines $n -$ ièmes de Z si*

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{Z} \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{re^{i(\theta+2k\pi)}}, k = \{0,1,2,...,n-1\} \\ &\Rightarrow z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ k = \{0,1,2,...,n-1\} \end{aligned}$$

Exemple 4.11.1 *On va calculer les racines quatrièmes de* $Z = 1 + i\sqrt{3}$
On écrit $Z = 1 + i\sqrt{3}$ *sous forme exponentielle alors :*

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{(1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta &= \arg(z) : \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc les racines quatrièmes de Z *sont*

$$z_k = \sqrt[4]{2} e^{i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)\frac{1}{4}}, \ k = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Alors,

$$z_0 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{\pi}{12}}, z_1 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}, z_2 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{13\pi}{12}}, z_4 = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{19\pi}{12}}.$$

4.12 Résolution des équations dans $\mathbb{C}$

Proposition 4.12.1 *Soit l'équation du scond degré* $az^2 + bz + c = 0$*, où* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *et* $a \neq 0$*, et soit* $\Delta = b^2 - 4ac$ *le discriminant.*
On distingue quatre cas :
1) *Si* $\Delta > 0$*, on a deux solutions réelles :*

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \ z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2) *Si* $\Delta = 0$*, on a une racine double*

$$z_0 = \frac{-b}{2a}.$$

3) *Si* $\Delta < 0$*, on a deux solutions complexes*

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

4) *Si* $\Delta = \alpha + i\beta$ *avec* $\beta \neq 0$*, on a deux solutions*

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a},$$

où δ *est la racine carrée de* Δ*.*

Exemple 4.12.1 *On va résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$: *On à*

$$\Delta=[-(3+i)]^2-4(-1+5i)=-3+4i$$

On cherche $\delta=x+iy$ *racine carrée de* Δ. *Donc*

$$\delta^2=\triangle\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-3 & \ldots(1)\\ 2xy=4 & \ldots(2)\\ x^2+y^2=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5 & \ldots(3)\end{cases}$$

$(1)+(3):2x^2=2\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1.$
$(3)-(1):2y^2=8\Rightarrow y^2=4\Rightarrow y=\pm2$
$(2):2xy>0$, *alors* x *et* y *de même signe*
Donc $\delta_1=1+2i$ *et* $\delta_2=-\delta_1=-1-2i$.
Alors, les solutions de l'équation sont

$$\begin{aligned}z_1&=\frac{-b-\delta}{2a}=\frac{3+4i-1-2i}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i\\ z_2&=\frac{-b+\delta}{2a}=\frac{3+4i+1+2i}{2}=\frac{4+6i}{2}=2+3i.\end{aligned}$$

Exercice 4.12.1 *Soient les deux nombres complexe* $Z=\frac{2+4i}{1-i}$ *et* $W=4\sqrt{3}+4i$
1) Ecrire Z *sous forme algèbrique.*
2) Déterminer les racines carrées de Z.
3) Ecrire W *sous forme exponentielle.*
4) Déterminer les racines cubiques de W.
5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$.

Solution. 1) La forme algèbrique de Z :

$$Z=\frac{2+4i}{1-i}=\frac{(2+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i$$

2) Les racines carrées de Z :
Soit $z^2=Z\Leftrightarrow(x+iy)^2=-1+3i$

$$\begin{cases}x^2-y^2=-1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\\ 2xy=3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\\ x^2+y^2=\sqrt{(-1)^2+3^2}=2\ldots\ldots(3)\end{cases}$$

$(1)+(3):2x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$(3)-(1) : 2y^2 = 3 \Rightarrow y^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.
$(2) : 2xy = 3 > 0$ alors, x et y sont de même signe.
Donc, $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}i, z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}i$.
3) La forme exponzntielle de W :

$$W = re^{i\theta}$$

On va calculer $r = |W|, \ \theta = \arg(W)$

$$r = |W| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = 8$$

$$\theta = \arg(W) : \begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{|W|} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{|W|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

Alors,

$$W = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$$

4) Les racines cubiques de W :
Soit

$$W = 8e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)}$$

Donc, les racines cubiques de W sont :

$$W_k = \sqrt[3]{8e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\frac{1}{3}}, k \in \{0,1,2\}$$

Alors,

$$W_0 = 2e^{i\frac{\pi}{18}}, W_1 = 2e^{i\frac{13\pi}{18}}, W_2 = 2e^{i\frac{25\pi}{18}}.$$

5) Résoulution danc $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

$$\Delta = \left(-8\sqrt{3}\right)^2 - 4(64) = -64 = i^2 64$$

On a,

$$\sqrt{\triangle} = \pm i8$$

Alors, les solutions de l'équation sont

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{8\sqrt{3}-8i}{2} = 4\sqrt{3}-4i \\ z_2 &= \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a} = \frac{8\sqrt{3}+8i}{2} = 4\sqrt{3}+4i. \end{aligned}$$

■

Exercice 4.12.2 *: Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :*

$$(1+2i)\,Z^2-(9+3i)\,Z-5i+10=0$$

Chapitre 5

Polynômes et Fractions Rationnelles

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif d'un des corps $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Généralités

D■finition 5.1.1 *On appelle polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ l'expression définie par :*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad , \qquad n \in \mathbb{N}$$

où $a_0, a_1, ..., a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ appelés coefficients du polynôme $P(x)$, et x une variable indéterminée.

On note par $\mathbb{K}[x]$ l'ensemble de tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemple 5.1.1 $P(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k x^k = 5x^3 - 2x^2 + 3$ *est polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*

D■finition 5.1.2 .

i) Si tous les coefficients $a_k = 0$, alors $P(x) = 0$ est appelé le polynôme nul.

ii) On appelé polynômes constant tous polynômes de la forme $P(x) = a_0$.

iii) Si $a_n = 1$, on dit que $P(x)$ est un polynôme unitaire.

D■finition 5.1.3 *On appelle degré d'un polynôme P, et note par* $\deg(P)$*, le plus grand entier k tel que* $a_k \neq 0$.

Autrement dit,

$$\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N},\ a_k \neq 0\}.$$

On note par $\mathbb{K}_n[x]$ l'ensemble de tous les polynômes inférieur ou égal à n et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$$\mathbb{K}_n[x] = \{P \in \mathbb{K}_n[x] \mid \deg(P) \leq n\}.$$

Remarque 5.1.1 .

1) *Un polynôme constant non nul est un polynôme de degré* 0.

2) *Le polynôme nul n'a pas de degré.*

Exemple 5.1.2 .

- $x^3 - 5x + \frac{3}{4}$ *est un polynôme de degré* 3
- $x^n + 2$ *est un polynôme de degré n.*
- 2 *est un polynôme constant de degré* 0.

5.2 Opérations sur les polynômes

D■finition 5.2.1 (Égalité) *Soient $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ et $Q = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit que P et Q sont égaux ssi :*

$$P = Q \Leftrightarrow a_k = b_k \quad \textit{pour } k = \{0, 1, 2, ..., n\},$$

D■finition 5.2.2 ***(Addition)***

Soient $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ et $Q = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, Alors $P + Q \in \mathbb{K}[x]$ et on a

$$P+Q = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0).$$

D■finition 5.2.3 ***(Multiplication)***

Soient $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ et $Q = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, Alors $P \times Q \in \mathbb{K}[x]$ et on a

$$P \times Q = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + ... + c_2x^2 + c_1x + c_0,$$

avec $r = n + m$ et $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ avec $k = \{0, 1, 2, ..., r\}$

Définition 5.2.4 ***(Multiplication par un scalaire)***
Soient $P = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *un polynôme de* $\mathbb{K}[x]$, *et* $\lambda \in \mathbb{k}$. *Alors* λP *de*$\mathbb{K}[x]$ *et on a*

$$\lambda P = \lambda a_nx^n + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + ... + \lambda a_2x^2 + \lambda a_1x + \lambda a_0.$$

Exemple 5.2.1 *Soient* $P = x^3 - 2x + 1$ *et* $Q = x^2 + 3x - 2$

$$\begin{aligned} P + Q &= (1+0)\,x^3 + (3-2)\,x + (1-2) \\ &= x^3 + x - 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P \times Q &= (1\times 2)\,x^5 + (1\times 3)\,x^4 + (1\times(-2))\,x^3 + ((-2)\times 1)\,x^3 \\ &\quad + ((-2)\times 3)\,x^2 + ((-2)\times(-2))\,x + (1\times 1)\,x^2 + (1\times 3)\,x + 1\times(-2) \\ &= 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 7x - 2 \end{aligned}$$

Proposition 5.2.1 *Soient les polynômes* $P, Q, R \in \mathbb{K}[x]$ *Alors*
1) $0 + P = P,\quad P + Q = Q + P,\quad (P+Q) + R = P + (Q+R)$.
2) $1 \times P = P,\quad P\times Q = Q\times P,\quad (P\times Q)\times R = P\times(Q\times R)$.
3) $P\times(Q+R) = (P\times Q) + (P\times R)$.

Proposition 5.2.2 *Soient* P, Q *deux polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}[x]$. *Alors*

$$\begin{aligned} \deg(P\times Q) &= \deg(P) + \deg(Q) \\ \deg(P+Q) &\leq \max(\deg P, \deg Q) \end{aligned}$$

5.3 Division euclidienne

Définition 5.3.1 *Soient* $A, B \in \mathbb{K}[x]$ *avec* $\deg(B) \leq \deg(A)$, *on dit que* B *divise* A *(ou* B *diviseur de* A*) s'il existe un polynôme* $Q \in \mathbb{K}[x]$ *tel que* $A = BQ$. *On note* $B|A$.

On dit aussi que A *est multiple de* B *ou que* A *est divisible par* B.

Exemple 5.3.1 .
Le polynôme $P(x) = x - 2$ *divise la polynôme* $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ *car :*

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1).$$

Définition 5.3.2 .

Soit $A \in \mathbb{K}[x]$ *tel que* $\deg(A) \geq 1$. *On dit que* P *est un polynôme irréductible si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes qui lui sont associés, c'est-à-dire les polynômes de la forme* λA, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dans le cas contraire, on dit que A *réductible, c'est-à-dire il existe alors des polynômes* $B, Q \in \mathbb{K}[x]$ *tels que* $A = BQ$, *avec* $\deg(B) \geq 1$ *et* $\deg(Q) \geq 1$.

Exemple 5.3.2 .

- *Les polynômes de degré* 1 *sont toujours irréductibles.*
- *Dans* $\mathbb{C}[x]$, *les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré* 1.
- *Dans* $\mathbb{R}[x]$, *les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré* 1 *et les polynômes de degré* 2 *de discriminant négatif.*
- $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$ *est réductible dans* $\mathbb{C}[x]$ *mais est irréductible dans* $\mathbb{R}[x]$.

Théorème 5.3.1 ***(Division euclidienne)***

Soient $A, B \in \mathbb{K}[x]$ *avec* $\deg(B) \leq \deg(A)$ *et* $B \neq 0$, *alors il existe un unique polynôme* Q *et il existe un unique polynôme* R *tels que*

$$A = BQ + R \quad \text{avec } \deg(R) < \deg(B)$$

A *est appelé le dividende,* B *le diviseur,* Q *le quotient et* R *le reste de la division euclidienne de* A *par* B.

Exemple 5.3.3 *La division euclidienne du polynôme*
$A(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ *par* $B(x) = x^2 - x + 1$

$$\begin{array}{rr|l}
 & 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1 & X^2 - X + 1 \\
- & 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 & \\
\hline
 & X^3 - 4X^2 + 3X - 1 & 2X^2 + X - 3 \\
- & X^3 - X^2 + X & \\
\hline
 & -3X^2 + 2X - 1 & \\
- & -3X^2 + 3X - 3 & \\
\hline
 & -X + 2 &
\end{array}$$

alors

$$A(x) = \left(x^2 - x + 1\right)\left(2x^2 + x - 3\right) - x + 2.$$

Exemple 5.3.4 *En utilisant le shéma de Horner. Effectuer la division euclidienne de*

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 \text{ par } Q(x) = x - 3.$$

	1	-3	2	-1	2
3	0	3	0	6	15
	1	0	2	5	17

Alors

$$P(x) = (x-3)\left(x^3 + 2x + 5\right) + 17.$$

5.4 Racines d'un polynôme

D■finition 5.4.1 *Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une* ***racine*** *(ou un zéro) de P si $P(\alpha) = 0$.*

Proposition 5.4.1 *Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :*

$$\alpha \text{ est une racine de } P \Leftrightarrow P \text{ divisible par } (x-\alpha).$$

Exemple 5.4.1 *Soit $P \in \mathbb{R}[x]$, $P(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 3$*

On a $P(1) = (1)^3 + 4(1)^2 - 2(1) - 3 = 0$, alors 1 est une racine de P.

La division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x - 1$

$$\begin{array}{llll|lll}
x^3 & +4x^2 & -2x & -3 & X & -1 & \\
-x^3 & +x^2 & & & x^2 & +5x & +3 \\
 & 5x^2 & -2x & -3 & & & \\
 & -5x^2 & +5x & & & & \\
 & & 3x & -3 & & & \\
 & & -3x & +3 & & & \\
 & & 0 & 0 & & &
\end{array}$$

Alors

$$P(x) = (x-1)\left(4x^2 + 5x + 3\right)$$

D■finition 5.4.2 *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que $\alpha \in \Bbbk$ est une racine de multiplicité k de P si $(x-\alpha)^k$ divise P et que $(x-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P. On dit aussi que α est une racine d'ordre k.*

Remarque 5.4.1 *Lorsque $k = 1$ on parle d'une* ***racine simple****, lorsque $k = 2$ on parle d'une* ***racine double****, lorsque $k = 3$ on parle d'une* ***racine triple****, ..etc*

Exemple 5.4.2 $P(x) = (x-3)^2 (x-5)(x-1)^3$,
5 racine simple, 3 racine double, 1 racine triple.

Proposition 5.4.2 *Les propositions suivantes sont équivalantes :*
i) α *est une racine de multiplicité* k *de* P,
ii) Il existe $Q \in [x]$ *tel que* $P(x) = (x-\alpha)^k Q(x)$ *et* $Q(\alpha) \neq 0$.
iii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = ... = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ *et* $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Exemple 5.4.3 *Soit* $P(X) = x^3 + x^2 - 2$ *et* $Q(X) = x^3 + 3x^2 - 4$. *Alors,*
1) 1 *racine simple de* P *car :*

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 + 1^2 - 2 = 0 \\ P'(X) &= 3X^2 + 2X \Rightarrow P'(1) = 5 \neq 0 \end{aligned}$$

Donc,

$$P(x) = (x-1)\left(x^2 + 2x + 2\right)$$

2) (-2) *racine double de* Q *car :*

$$\begin{aligned} Q(-2) &= (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = 0 \\ Q'(X) &= 3X^2 + 3X \Rightarrow Q'(-2) = 0 \\ Q''(X) &= 6X + 3 \Rightarrow Q''(-2) = -6 \neq 0 \end{aligned}$$

Donc,

$$Q(x) = (x+2)^2 (x-1).$$

5.5 Factorisation d'un polynôme

Th■or■mme 5.5.1 *Soit* $P \in \mathbb{K}[x]$ *un polynôme de degré* $n \geq 1$. *Alors* P *s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles unitaires,*

$$P = \lambda P_1^{k_1} P_2^{k_2} ... P_r^{k_r}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ *et les* P_i *sont des polynômes irréductibles distincts.*

Th■or■mme 5.5.2 (Factorisation dans $\mathbb{C}[x]$) *Les polynômes irréductibles dans* $\mathbb{C}[x]$ *sont les polynômes de degré* 1.
La factoristion d'un polynôme de degré $n \geq 1$ *s'écrit,*

$$P = \lambda (x-\alpha_1)^{k_1} (x-\alpha_2)^{k_2} ... (x-\alpha_r)^{k_r}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ *sont les racines distinctes de* P *et* $k_1, k_2, ..., k_r$ *sont leurs multiplacité.*

Exemple 5.5.1 *Soit le polynôme* $P(x) = x^4 - 1$. *Alors*

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 4 = \left(x^2 - 2\right)\left(x^2 + 2\right) \\ &= \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - i\sqrt{2}\right)\left(x + i\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$

Th■or■mme 5.5.3 *Soit* P *un polynôme à coefficients réels admet le nombre complexe* z $(\mathrm{Im}(z) \neq 0)$ *comme racine. Alors* $\overline{z}$ *est aussi racine de* P *avec le même ordre de* z.

Exemple 5.5.2 *Soit* $P(x) = x^2 + 2x + 2$ *admet* $-1 + i$ *comme racine. Alors,* $-1 - i$ *est une racine de* P.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 + 2x + 2 = (x - (-1 + i))(x - (-1 - i)) \\ &= (x + 1 - i)(x + 1 + i) \end{aligned}$$

Th■or■mme 5.5.4 (Factorisation dans $\mathbb{R}[x]$) *Les polynômes irréductibles dans* $\mathbb{R}[x]$ *sont les polynômes de degré* 1 *et les polynômes de degré* 2 *avec* $\Delta < 0$.

La factoristion d'un polynôme de degré $n \geq 1$ *s'écrit :*

$$P = \lambda (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_r)^{k_r} Q_1^{n_1} Q_2^{n_2} \ldots Q_s^{n_s}$$

où les α_i *sont exactement les racines réelles distinctes de multiplicité* k_i *et* Q_i *sont les polynômes irréductibles de degré* 2.

Exemple 5.5.3 *Soit le polynôme* $P(x) = x^4 - 1$. *Alors*

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 1 = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right) \\ &= (x - 1)(x + 1)\left(x^2 + 1\right). \end{aligned}$$

Remarque 5.5.1 *On va factriser* $P(x) = ax^2 + bx + c$ *où* $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1) *Si* $\Delta > 0$, *alors on a,*

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2) *Si* $\Delta = 0$, *alors on a* $x_0 = \frac{-b}{2a}$, *et*

$$P(x) = a(x - x_0)^2$$

3) *Si* $\Delta < 0$, *alors on a :*

a) *Dans* $\mathbb{R}$ *: pas de factorisation.*

b) *Dans* $\mathbb{C}$, *on a*$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ *et* $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, *et*

$$P(x) = a(x - z_1)(x - z_2)$$

Exemple 5.5.4 *factriser dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$*

$$P(x) = 2x^2 + 3x - 5,\ Q(x) = x^2 + 3x + 9,\ R(x) = 2x^2 + 3x + 5.$$

5.6 Fractions rationnelles

D■finition 5.6.1 *Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ avec $Q \neq 0$. On appelle fraction rationnelle F le quotient de P par Q et on note*

$$F = \frac{P}{Q}.$$

D■finition 5.6.2 (Pôle) *Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors*

1) *On dit que α est une racine (ou zéro) d'ordre k de $F = \dfrac{P}{Q}$ si et seulement si α est une racine d'ordre k de P et α n'est pas racine de Q.*

2) *On dit que α est un pôle d'ordre k de $F = \dfrac{P}{Q}$ si et seulement si α est une racine d'ordre k de Q.*

Exemple 5.6.1 .

1) $\dfrac{(x-2)^2}{x^2+1}$, *2 racine double, i et $-i$ deux pôles simples dans $\mathbb{C}$, mais n'a pas de pôles dans $\mathbb{R}$.*

2) $\dfrac{x^2+1}{(x-2)^3}$, *i et $-i$ deux racines simples dans $\mathbb{C}$, mais n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$. 2 est un pôle d'ordre 3.*

D■finition 5.6.3 (Partie entière) *Soient $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ et $F = \dfrac{P}{Q}$ avec $\deg(P) \geq \deg(Q)$. Alors, il existe deux polynômes E et R tel que $P = EQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$. Donc*

$$F = E + \frac{R}{Q}.$$

E est appelée la partie entière de F.

Remarque 5.6.1 .

1) *Pour trouver E et R, on effectuons la division euclidienne de P par Q.*

2) *Si $\deg(P) < \deg(Q)$ alors $E = 0$.*

Exemple 5.6.2 .

1) *Soit* $F = \dfrac{x^3+1}{x^2}$. *On a*

$$F = \frac{x^3+1}{x^2} = x + \frac{1}{x^2}.$$

Ici la partie entière $E = x$.

2) *Soit* $F = \dfrac{x^4-3}{x^2+1}$. *On a*

$$\begin{aligned} F &= \frac{(x^4-1)-2}{x^2+1} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)-2}{x^2+1} \\ &= x^2 - 1 - \frac{2}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Ici la partie entière $E = x^2 - 1$.

5.7 Décomposition en éléments simples

Th■or■mme 5.7.1 (Dans $\mathbb{C}$) *Soit* $\dfrac{P}{Q}$ *fraction rationnelle avec* $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, $pgcd(P,Q) = 1$ *et* $Q = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \ldots (x-\alpha_r)^{k_r}$. *Alors il existe une seule écriture*

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= E + \frac{a_1}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{a_2}{(x-\alpha_2)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{a_{k_1}}{(x-\alpha_1)} \\ &\quad + \frac{b_1}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \frac{b_2}{(x-\alpha_2)^{k_2-1}} + \ldots + \frac{b_{k_2}}{(x-\alpha_2)} \\ &\quad + \ldots \\ &\quad + \frac{c_1}{(x-\alpha_r)^{k_r}} + \frac{c_2}{(x-\alpha_r)^{k_r-1}} + \ldots + \frac{c_{k_r}}{(x-\alpha_r)}. \end{aligned}$$

Exemple 5.7.1 .

1)

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{1}{2(x+i)} - \frac{1}{2(x-i)}.$$

2)

$$\frac{x^4 - 8x^2 + 9x - 7}{(x-2)^2(x+3)} = x + 1 + \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} + \frac{-1}{x+3}.$$

3)

$$\begin{aligned}\frac{x^3+2x}{(x^2+1)^2} &= \frac{x^3+2x}{(x+i)^2(x-i)^2}\\ &= \frac{-i}{4(x-i)^2}+\frac{1}{2(x-i)}+\frac{i}{4(x+i)^2}+\frac{1}{2(x+i)}.\end{aligned}$$

Th■or■mme 5.7.2 (Dans $\mathbb{R}$) .

Soit $\dfrac{P}{Q}$ *fraction rationnelle avec* $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, *pgcd*$(P,Q)=1$

et $Q=(x-\alpha_1)^{k_1}\ldots(x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}\ldots.(x^2+p_sx+q_s)^{n_s}$ *avec* $\Delta_i<0$ *pour* $i=1,..,s$. *Alors il existe une seule écriture*

$$\begin{aligned}\frac{P}{Q} = {} & E+\frac{a_1}{(x-\alpha_1)^{k_1}}+\frac{a_2}{(x-\alpha_2)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{a_{k_1}}{(x-\alpha_1)}\\ & +\ldots\\ & +\frac{c_1}{(x-\alpha_r)^{k_r}}+\frac{c_2}{(x-\alpha_r)^{k_r-1}}+\ldots+\frac{c_{k_r}}{(x-\alpha_r)}\\ & +\frac{A_1x+B_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}}+\ldots+\frac{A_{n_1}x+B_{n_1}}{(x^2+p_1x+q_1)}\\ & +\ldots\\ & +\frac{C_1x+D_1}{(x^2+p_sx+q_s)^{n_s}}+\ldots+\frac{C_{n_s}x+D_{n_s}}{(x^2+p_sx+q_s)}\end{aligned}$$

Exemple 5.7.2 *Décomposer en éléments simples dans* $\mathbb{R}[x]$.

$$F=\frac{x^4-x^2+1}{x^3-x^2}$$

Solution. On a $\deg(x^4-x^2+1)>\deg(x^3-x^2)$. On effectue la division euclidienne, on trouve

$$x^4-x^2+1=\left(x^3-x^2\right)(x+1)+1$$

Alors

$$F=x+1+\frac{1}{x^3-x^2}$$

On pose

$$G=\frac{1}{x^3-x^2}$$

On a $\deg(G) < 0$, et 1 pôle simple et 0 pôle double.

$$G = \frac{1}{x^2(x-1)}.$$

On en déduit que

$$G = \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} c &= \left.\frac{1}{x^2}\right|_{x=1} = 1 \\ b &= \left.\frac{1}{x-1}\right|_{x=0} = -1 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} xG &= a + c = 0 \\ &\Rightarrow a = -c = -1 \end{aligned}$$

Alors

$$F = x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}.$$

■

Exercice 5.7.1 *Soit le polynôme $\mathbb{R}[X]$ défini par :*

$$P(X) = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$$

1) Vérifier que (-1) est une racine de P, quelle est sa multiplicité.
2) Factoriser $P(X)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
3) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{2X+1}{P(X)}.$$

Solution.

$$P(X) = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$$

1) Vérification de (-1) est une racine de P
P$(-1) = 0$ alors (-1)est une racine de P

De plus :

$$\begin{aligned} \acute{P}(X) &= 4X^3 + 9X^2 + 8X + 3 \Rightarrow \acute{P}(-1) = 0 \\ \H{P}(X) &= 12X^2 + 18X + 8 \Rightarrow \H{P}(-1) = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

Donc (-1) est une rasine double de $P(X)$.

2) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$

Comme (-1) est une rasine double de $P(X)$ on a,

$$P(X) = (X+1)^2 Q(X)$$

on effectuer la division euclidienne de P par $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$. On trouve :

$$P(X) = (X+1)^2 \left(X^2 + X + 1\right)$$

On va factoriser $X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{R}$:

$$\triangle = -3 < 0$$

Alors :

$$P(X) = (X+1)^2 \left(X^2 + X + 1\right)$$

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$.

Dans $\mathbb{C}$:

On va factoriser $X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{C}$:

On a :

$$\triangle = -3 = i^2 3$$

Alors,

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ X_2 &= \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Donc,

$$P(X) = (X+1)^2 \left(X + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$$

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$.

3) Décomposition la fraction rationnelle : $F(X) = \frac{2X+1}{P(X)}$

La factoriser de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$P(X) = (X+1)^2 \left(X^2 + X + 1\right)$$

Comme (-1) est un pôle double et X^2+X+1 est irréductible $(\triangle < 0)$, la décomposition de F s'écrit :

$$F = \frac{2X+1}{(X+1)^2 (X^2+X+1)} = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{(X+1)} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

On a :

$$a = \left.\frac{2X+1}{X^2+X+1}\right|_{X=-1} = -1$$

On remplace la valeur de $a = -1$ dans F :

$$\frac{2X+1}{(X+1)^2 (X^2+X+1)} = \frac{-1}{(X+1)^2} + \frac{b}{(X+1)} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{2X+1}{(X+1)^2 (X^2+X+1)} + \frac{1}{(X+1)^2} = \frac{b}{(X+1)} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} \\
&\Rightarrow \quad \frac{X^2+3X+2}{(X+1)^2 (X^2+X+1)} = \frac{b}{(X+1)} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} \\
&\Rightarrow \quad \frac{(X+1)(X+2)}{(X+1)^2 (X^2+X+1)} = \frac{b}{(X+1)} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}
\end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{(X+2)}{(X+1)(X^2+X+1)} = \frac{b}{(X+1)} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} \ldots\ldots (*)$$

D'aprés $(*)$ on a :

$$b = \left.\frac{(X+2)}{X^2+X+1}\right|_{X=-1} = 1$$

On remplace la valeur de $b = 1$ dans $(*)$:

$$\begin{aligned}
\frac{(X+2)}{(X+1)(X^2+X+1)} &= \frac{1}{(X+1)} + \frac{cX+d}{X^2+X+1} \\
&\Rightarrow \quad \frac{(X+2)}{(X+1)(X^2+X+1)} - \frac{1}{(X+1)} = \frac{cX+d}{X^2+X+1} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1-X^2}{(X+1)(X^2+X+1)} = \frac{cX+d}{X^2+X+1}
\end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{-X+1}{X^2+X+1}=\frac{cX+d}{X^2+X+1}$$

Par comparaison, on a :

$$c=-1, d=1$$

La décomposion de F est :

$$F(X)=\frac{2X+1}{(X+1)^2(X^2+X+1)}=\frac{-1}{(X+1)^2}+\frac{1}{(X+1)}+\frac{-1X+1}{X^2+X+1}.$$

■

Exercice 5.7.2 *:*

Soit le polynôme $P=X^4-4X^3+3X^2+4X-4$

- Vérifier que : $1,-1$ *et* 2 *sont des racines de* P*.*

- Quelle est la multiplicité de chacune de ces racines.

- Factoriser P*.*

- Soit le le polynôme $Q=X^4-X^2+1$*, effectuer la division euclidienne de* Q *par* P*.*

- Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{P}{Q}$*.*

Chapitre 6

Calcul Matriciel, Calcul des déterminants

Dans ce chapitre, $\mathbb{k}$ désigne un corps. On peut penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Calcul Matriciel

6.1.1 Définitions

D■finition 6.1.1 - *Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{k}$.*

*- Elle est dite de **taille** $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.*

*- Les nombres du tableau sont appelés les **coefficients** de A.*

- Le coefficient situé à la $i-$ème ligne et à la $j-$ème colonne est noté $a_{i,j}$.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,j} & . & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,j} & . & a_{2,p} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i,1} & a_{i,2} & & a_{i,j} & & a_{i,p} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,j} & . & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

ou

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad ou \ \ (a_{i,j})$$

Exemple 6.1.1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de 2 *lignes et* 3 *colonnes.* $A \in M_{2,3}$, *et on a :* $a_{1,1} = 3$ *et* $a_{2,3} = 0$.

D■finition 6.1.2 *Deux matrices sont* ***égales*** *lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.*

Exemple 6.1.2 *Résoudre l'équation* $A = B$ *avec*

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & x^2 - y & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Comme $A = B$ *alors,*

$$\begin{cases} x = 2 \\ x^2 - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

La solution est donc $x = 2$ *et* $y = 4$.

Remarque 6.1.1 *L'ensemble des matrices à* n *lignes et* p *colonnes à coefficients dans* $\mathbb{k}$ *est noté* $M_{n,p}(\mathbb{k})$. *Les éléments de* $M_{n,p}(\mathbb{R})$ *sont appelés* ***matrices réelles***.

6.1.2 Matrices particulières

• Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite **matrice carrée**. On note $M_n(\mathbb{k})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{k})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, ..., a_{n,n}$ forment la **diagonale principale** de la matrice.

Exemple 6.1.3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

• *A est une **matrice carrée** de taille 3×3 ou A_3.*

• *Les éléments $0, 4, 3$ forment la **diagonale principale** de la matrice A.*

• Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée **matrice ligne** ou **vecteur ligne**. On la note $A = (a_{1,1}\ a_{1,2} ... a_{1,p})$.

Exemple 6.1.4

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

• De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée **matrice colonne** ou **vecteur colonne**. On la note $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \\ \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$

Exemple 6.1.5

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• La matrice A de taille $n \times p$ dont toutes les éléments nuls est appelée la **matrice nulle** et est notée $0_{n,p}$.

Exemple 6.1.6

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$$

6.2 Opération sur les matrices

6.2.1 Addition de matrices

D■finition 6.2.1 *Soient A et B deux matrices ayant la* même taille $n \times p$. *Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

En d'autres termes, on somme coefficients par coefficients.

Exemple 6.2.1 *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A + B = \begin{pmatrix} 0+3 & 5+(-2) \\ -2+1 & -1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Par contre
Si

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 8 & -7 & 4 \\ 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$ *Alors $A + B$* ***n'est pas définie****.*

6.2.2 Soustraction de matrices

D■finition 6.2.2 *Soient A et B deux matrices ayant la* même taille $n \times p$. *Leur soustraction $C = A - B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par*

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Exemple 6.2.2 *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A - B = \begin{pmatrix} 0-3 & 1-0 & 5-(-2) \\ 2-3 & 4-1 & 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

6.2.3 Produit d'une matrice par un scalaire

D■finition 6.2.3 *Le produit d'une matrice* $A = (a_{i,j})$ *de* $M_{n,p}(\mathbb{k})$ *par un scalaire* $\alpha \in \mathbb{k}$ *est la matrice* $(\alpha a_{i,j})$ *formée en multipliant chaque coefficient de* A *par* α.

Elle est notée $\alpha.A$ *(ou simplement* αA*).*

Exemple 6.2.3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, *et* $\alpha = \frac{1}{2}$, *alors* $\alpha A = \frac{1}{2} A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 6.2.1 *Soient* A, B *et* C *trois matrices appartenant à* $M_{n,p}(\mathbb{k})$. *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ *deux scalaires.*

1. $A + B = B + A$ *: la somme est commutative,*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *: la somme est associative,*
3. $A + 0 = A$ *: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,*
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Exercice 6.2.1 *Soient les matrices* $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

1- Calculer $A - B$ *et* $2A - 3B$.

Solution.

$$A - B = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= 2\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 4 \\ 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -6 & 0 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -20 & 1 \\ 6 & -2 \\ 11 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

6.2.4 Multiplication de matrices

Le produit AB de deux matrices A et B est *défini* si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

D■finition 6.2.4 *Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est matrice de $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :*

$$c_{ij} = \sum_{k=}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + +a_{ik}b_{kj} + +a_{ip}b_{pj}.$$

Exemple 6.2.4 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1)(0) + (0)(-1) + (-3)(3) & (1)(2) + (0)(1) + (-3)(2) \\ (-4)(0) + (2)(-1) + (1)(3) & (-4)(2) + (2)(1) + (1)(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculer le coefficient c_{ij} dans le produit AB revient donc à calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la $i-$ème ligne de A et la $j-$ème colonne de B.

Remarque 6.2.1 *Le produit de matrices n'est pas commutatif en général. Soient AB et BA définis et de la même taille , on a en général $AB \neq BA$.*

Exemple 6.2.5 *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer AB, et BA.

Solution.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 7 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Alors $AB \neq BA$. ■

Exemple 6.2.6 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ *On a*

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$$

• $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Exemple 6.2.7 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *On a* $AB = 0$.

• $AB = AC$ n'implique pas $B = C$. On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

Exemple 6.2.8 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, *et* $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ *On à*

$$AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$

Proposition 6.2.2 *.*

1. $A(BC) = (AB)C$ *: associativité du produit,*

2. $A(B + C) = AB + AC$ *et* $(B + C)A = BA + CA$ *: distributivité du produit par rapport à la somme,*

3. $A.0 = 0$ *et* $0.A = 0$.

6.2.5 Transposition d'une matrice

D■finition 6.2.5 *On appelle **transoposée d'une matrice** A de type (n,p) et de terme général a_{ij}, la matrice notée ${}^tA$*

obtenue en changant les lignes et les colonnes de même indice i de A

$$A=(a_{ij})\Leftrightarrow^t A=^t(a_{ij})=a_{ji}.$$

Exemple 6.2.9 *Soient A, B et C*

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & 2\\ 0 & 7\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

alors

$$A^t=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 7\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 1\end{pmatrix}.$$

Th■or■mme 6.2.1 *Soient A et B deux matrices et α un scalaire :*

1- $(A^t)^t=A$,
2- $(\alpha A)^t=\alpha A^t$,
3- $(A+B)^t=A^t+B^t$,
4- $(AB)^t=B^tA^t$.

Exemple 6.2.10 .

1- *Soit* $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$, *alors* ${}^tA=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

et ${}^t({}^t\mathbf{A})=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}=\mathbf{A}.$

2- Soit $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$, *alors* $\alpha A=\begin{pmatrix}2\alpha & -1\alpha & 3\alpha\\ 0 & -1\alpha & 5\alpha\end{pmatrix}$

et ${}^t(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A})=\begin{pmatrix}2\alpha & 0\\ -1\alpha & -1\alpha\\ 3\alpha & 5\alpha\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}^t\mathbf{A}.$

3- *Soit* $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & -4 & 6\end{pmatrix}$,

alors $A+B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & -5 & 11\end{pmatrix}\Rightarrow^t(A+B)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -5\\ 3 & 11\end{pmatrix}$

$$et\,{}^t\mathbf{A}+{}^t\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} =^{\mathbf{t}} (\mathbf{A}+\mathbf{B}).$$

4- Soient $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

alors $CD = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 8 \\ 15 & -4 & 28 \end{pmatrix} \Rightarrow^t (CD) = \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 1 & -4 \\ 8 & 28 \end{pmatrix}$

puis ${}^t\mathbf{D}{}^t\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ 1 & -4 \\ 8 & 28 \end{pmatrix} =^t (\mathbf{CD})$

6.2.6 La trace d'une matrice

D■finition 6.2.6 *Soit la matrice carrée A de taille $n \times n$.*

La trace de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,

$$trA = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}.$$

Exemple 6.2.11 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \; et \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \\ 10 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

alors $trA = 2 + 5 = 7$ *et* $trB = 1 + 2 + (-10) = -7$.

Th■or■mme 6.2.2 *Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :*

1. $tr(A + B) = trA + trB$,
2. $tr(\alpha A) = \alpha trA$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{k}$,
3. $tr(AB) = tr(BA)$.

6.3 Matrices carrées particulières

Soit A une matrice carrée d'ordre n

6.3.1 Matrice diagonale

D■finition 6.3.1 *Une matrice carrée dont tous les éléments sont* ***nuls*** *sauf de la diagonale principale est appelée* ***matrice diagonale.***

$A = (a_{ij})$ *avec* $a_{ij} = 0$ *pour* $i \neq j$ *a la forme suivante :.*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,1} & 0 & . & 0 & . & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{2,2} & . & 0 & . & 0 \\ . & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a}_{i,i} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & .0 \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 & \mathbf{a}_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exemple 6.3.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *une matrice diagonale.*

6.3.2 Matrice identité

D■finition 6.3.2 *On appelle* ***matrice identité*** *ou* ***matrice unité*** *la matrice diagonale où les éléments de la diagonale principale sont égaux à* 1

$A = (a_{ij})$ *avec* $a_{ii} = 1$*. On note* I_n *ou* I*.*

Proposition 6.3.1 $AI = IA = A$ *avec*

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *à d'ordre* 2.
- $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *à d'ordre* 3.

Exemple 6.3.2 .

Remarque 6.3.1 *Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre* 1 *pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication.*

6.3.3 Matrice scalaire

D■finition 6.3.3 *On appelle* ***matrice scalaire*** *la matrice diagonale où les éléments de la diagonale principalae sont égaux.*

$A = (a_{ij})$ *avec* $a_{ii} = \lambda \in \mathbb{k}$.

Proposition 6.3.2 .

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow A = \lambda I = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.3.4 Puissance d'une matrice

D■finition 6.3.4 *Pour tout $A \in M_n(K)$, on définit les puissances successives de A par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Autrement dit,*

$$A^p = \underbrace{A \times A \times ..... \times A}_{p \text{ facteurs}}$$

Si A est diagonale,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} a_{33}^3 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^3 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^3 \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

En particulier, $I^n = I$ pour tout entier positif n.

Exercice 6.3.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 et A^3.

Solution.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

■

Formule du binôme

Comme la multiplication n'est pas commutative alors

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)\times(A+B)\\ &= A^2+AB+BA+B^2.\end{aligned}$$

Proposition 6.3.3 *Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{k})$ qui commutent, c'est-à-dire tels que $AB = BA$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a la formule*

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k}.$$

Exercice 6.3.2 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, B^2, AB et BA.

Solution. Calcule

$$\begin{aligned}A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\\ AB &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

■

6.3.5 Matrice symétrique

D■finition 6.3.5 *Matrice carrée dont les éléments* ***symétriques*** *par rapport à la diagonale sont égaux $(a_{ij} = a_{ji})$.*

Exemple 6.3.3 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -3 \\ 2 & \beta & 9 \\ -3 & 9 & \gamma \end{pmatrix}$$

Proposition 6.3.4 *:*

Une matrice carrée A telle que $A = {}^t A$ est symétrique.

6.3.6 Matrice antisymétrique

D■finition 6.3.6 *Matrice carrée dont les éléments symétriques par rapport à la diagonale sont opposés et ceux de la diagonale principale nuls* ($a_{ij} = -a_{ji}$ *et* $a_{ii} = 0$).

Exemple 6.3.4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 6.3.5 *:*
Une matrice carrée A *telle que* $A = -{}^tA$ *est antisymétrique.*

6.3.7 Matrice triangulaire

D■finition 6.3.7 *Matrice carrée dont les éléments sont nuls au-dessus* ($a_{ij} = 0$ *pour* $i > j$: ***matrice triangulaire supérieure***)
ou au-dessous ($a_{ij} = 0$ *pour* $i < j$: ***matrice triangulaire inférieure***).

Exemple 6.3.5 .

- ***Matrice triangulaire supérieure :*** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.
- ***Matrice triangulaire inférieure :*** $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

6.3.8 Matrice inversble

D■finition 6.3.8 *Soit* $A \in M_n(\mathbb{k})$. *On dit qu'elle est* ***inversible*** *s'il existe une matrice* $B \in M_n(\mathbb{k})$ *telle que :*

$$AB = BA = I_n$$

On appelle B *l'inverse de* A *et notée* A^{-1}.

Exemple 6.3.6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pour vérifie que $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ *on a,*

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = I_3 \end{aligned}$$

Exercice 6.3.3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ *.Déterminer* A^{-1}.

Solution. Supposons $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, alors

$$A \times A^{-1} = I_2$$

on a,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors,

$$\begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ 3a-5c & 3b-5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc,

$$\begin{cases} a-2c=1 \\ b-2d=0 \\ 3a-5c=0 \\ 3b-5d=1 \end{cases},$$

alors ;

$$a=-5,\ b=2,\ c=-3,\ d=1$$

donc,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Proposition 6.3.6 *1- Si A est inversible, alors son inverse est unique.*

2- Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a : $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

3- Soient Aet B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Exercice 6.3.4 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que : $A^2 + \alpha A + \beta I_3 = 0$, où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.

2) Vérifier que la matrice A est inversible.

3) Calculer A^{-1}.

Solution. 1) <u>On va calcul $A^2 + \alpha A + \beta I_3 = 0$</u> :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 + \alpha A + \beta I_3 &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 0_3 \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} -2 + \beta = 0 \\ 3 + \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta = 2, \alpha = -3.$$

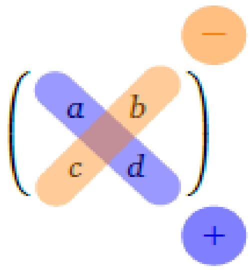
2) <u>Vérifier que la matrice A est inversible.</u>

On a,

$$\begin{aligned} A^2 + \alpha A + \beta I_3 &= 0 \Rightarrow A^2 - 3A - 2I_3 = 0 \\ &\Rightarrow A\left(A - 3I_3\right) = 2I_3 \\ &\Rightarrow A\left[\frac{1}{2}\left(A - 3I_3\right)\right] = I_3 \end{aligned}$$

Alors, A est inversible.

3) <u>Calculer A^{-1}</u>



$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{2}(A - 3I_3) \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right). \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Alors,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}.$$

■

Exercice 6.3.5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

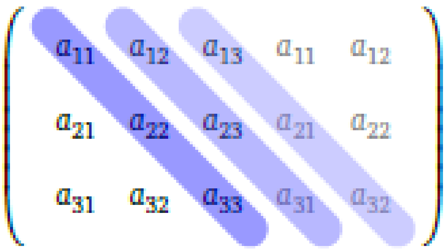
Calculer $A^3 - A$. *En déduire que* A *est inversible puis déterminer* A^{-1}.

6.4 Calcul des déterminants

6.4.1 Déterminant d'une matrice carrée d'odre 2

Définition 6.4.1 *Soit* $A \in M_2(\mathbb{k})$ *une matrice* 2×2, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Alors $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$



Exemple 6.4.1 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ *On a*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times (-5) - 3 \times (-2) = 1$$

6.4.2 Déterminant d'une matrice caréée d'odre 3

D■finition 6.4.2 *Soit* $A \in M_3(\mathbb{k})$ *une matrice* 3×3,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

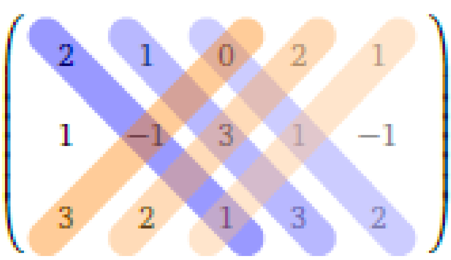
Voici la formule (c'est la régle de Sarrus *) pour le déterminant :*

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Attension : Cette méthode ne s'applique pas pour les matrices de taille supérieure à 3.

Exemple 6.4.2 *Calculons le déterminant de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Par la régle de Sarrus *:*



$$\begin{aligned}\det A &= 2\times(-1)\times 1+1\times 3\times 3+0\times 1\times 2\\ &\quad -3\times(-1)\times 0-2\times 3\times 2-1\times 1\times 1\\ &= -6\end{aligned}$$

6.4.3 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

D■finition 6.4.3 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice de taille $n \times n$*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1,j} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2j} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nj} & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On peut alors développer le calcul du déterminant de A suivant une ligne ou une colonne :

⧫ *Développement suivant la ligne i :*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} .a_{ij}. \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.C_{ij}$$

⧫ *Et le développement suivant la colonne j :*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} .a_{ij}. \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.C_{ij}.$$

Le terme $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ est appelé le cofecteur *du terme a_{ij} et le terme $\det(A_{ij})$ est appelé le* mineur *du terme a_{ij}.*

Exemple 6.4.3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calcul de détermiant par rapport à la ligne 1 :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} .a_{1j}. \det(A_{1j}) \\ &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + (-1)^{1+3} a_{13} \det(A_{13}) \\ &= +(\mathbf{-2}) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (\mathbf{-3}) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{-2}(1\times(-1) - 0\times 3) - \mathbf{2}((-1)\times(-1) - 4\times 3) - \mathbf{3}((-1)\times 0 - 4\times 1) \\ &= 2 + 22 + 12 = 36\end{aligned}$$

Exercice 6.4.1 *Calculer le déterminant des matrices suivant :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution. .

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{array}{c} \begin{matrix} + & \quad - & \quad + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \end{array} \\ &= +1 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Alors $\det(A) = -3$.
$\det(B) = -30$ (calculer le déterminant par rapport à la ligne 1)
$\det(C) = 3$ (calculer le déterminant par rapport à la colonne 3)

$$\begin{aligned} \det(C) &= \begin{array}{cc} \begin{matrix} + & \quad - & \quad + & \quad - \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{matrix} \\ + \\ - \\ + \end{matrix} \end{array} \\ &= +3 \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \end{aligned}$$

■

Proposition 6.4.1 *Soient* $A, B \in M_n(\mathbb{k})$

1/ $det({}^tA) = det(A)$.
2/ $det(A.B) = det(A).det(B)$
3/ $det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$.

$$4/\ det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,1} & 0 & . & 0 & . & 0 \\ 0 & \mathbf{a}_{2,2} & . & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & & \mathbf{a}_{i,j} & & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & . & \mathbf{a}_{n,n} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_{1,1}.\mathbf{a}_{2,2}...\mathbf{a}_{n,n}.$$

$$5/\ \ det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,j} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,j} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha a_{i,1} & \alpha a_{i,2} & & \alpha a_{i,j} & & \alpha a_{i,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,j} & . & a_{n,n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}.det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & a_{1,j} & . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & . & a_{2,j} & . & a_{2,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i,1} & a_{i,2} & & a_{i,j} & & a_{i,n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & . & a_{n,j} & . & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

6.4.4 Comatrice-Matrice adjointe

D■finition 6.4.4 *Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée de taille $n \times n$.*

On appelle ***comatrice*** *(ou* ***matrice adjointe*** *) de A, la matrice carrée d'ordre n, notée $com(A)$ $(ou\ adj(A))$ définie par :*

$$com(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & ... & ... & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & ... & ... & C_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ C_{n1} & C_{n2} & ... & ... & C_{n,n} \end{pmatrix}$$

où C_{ij} est le cofacteur de l'élément a_{ij} de A définie à partir du mineur $\det(A_{ij})$ *par la relation* $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.

Exemple 6.4.4 *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, *calculons comatrice de A*

On a $Com(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$

$$Com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{matrix} & -\begin{matrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{matrix} & +\begin{matrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \\ -\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} & +\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix} & -\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \\ +\begin{matrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix} & -\begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{matrix} & +\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Alors,

$$Com(A) = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 \\ -5 & -2 & 3 \\ -6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

6.4.5 Matrice inverse

D■finition 6.4.5 *Si le déterminant d'une matrice A est non nul* $(\det(A) \neq 0)$, *alors A est inversible, son inverse étant donnée par :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^{t}(Com(A))$$

Exemple 6.4.5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, *on a* $Com(A) = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 \\ -5 & -2 & 3 \\ -6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \\ &= +3 \begin{matrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} - 0 \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} + 4 \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{matrix} = 1 \end{aligned}$$

Comme $\det(A) = 1 \neq 0$, *alors* $\exists A^{-1}$ *tel que*

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)}{}^{t}(Com(A)) = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 \\ -5 & -2 & 3 \\ -6 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 \\ -5 & -2 & 3 \\ -6 & -3 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 6.4.2 *: Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

1- Calculer $\det(A)$ *et* $\det(B)$.

2- Calculer A^{-1} *et* B^{-1} *s'il existent.*

Solution. .

1) Calculons le $\det(A)$ et $\det(B)$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

et
$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -63$$

2) <u>Calculons A^{-1} et B^{-1} s'ils existent</u>

Comme $\det(A) = 0$ on a : A n'est pas inversible.
et $\det(B) = -63 \neq 0$ alors, B est inversible
tel que
$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\,{}^{t}com(B)$$

En effet :
$$\begin{aligned} com(B) &= \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -14 & -9 & 6 \\ -7 & -9 & -15 \\ 0 & -18 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors :
$${}^{t}(com(B)) = \begin{pmatrix} -14 & -7 & 0 \\ -9 & -9 & -18 \\ 6 & -15 & -9 \end{pmatrix}$$

Par conséquant :
$$B^{-1} = \frac{1}{-63}\begin{pmatrix} -14 & -7 & 0 \\ -9 & -9 & -18 \\ 6 & -15 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{-2}{21} & \frac{5}{21} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

■

Exercice 6.4.3 *: Pour quelles valeurs du paramètre t la matrice suivante est-elle inversible ?*

Dans ce cas, déterminer son inverse.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bibliographie

[1] **Arnaud B.,** Algèbre : Cours de mathématiques - Première année, Exo7, 2016.

[2] **Baba-Hamed.C**, **Benhabib. K**, Algèbre 1. Rappel de cours et exercices avec solutions. O.P.U., 1985.

[3] **Balac S.** et **Chupin L.**, Analyse et algèbre, cours de mathématiques de deuxième année avec exercices corrigés et illustrations avec Maple, Collection Sciences appliquées de l'INSA de Lyon, PPUR, 2008.

[4] **Christophe A,** Algèbre MP-MP* 2è année / cours et exercices corrigés, De Boeck Superieur, 2015.

[5] **Denmat.A. et F. Héaulme**, Algèbre linéaire, travaux dirigés, Dunod, 1999.

[6] **Daniel F, Frédéric B, Myriam M-B,** Mathématiques : Algèbre-géométrie en 30 fiches, Dunod, 2009.

[7] **François L, Dominique M,** Algèbre 1^{re} année - Cours et exercices avec solutions, Dunod, 2003.

[8] **Jean Marie A, Henri F, Pierre D,** Exercices résolus d'algèbre du cours de mathématiques, tome 1, Dunod, 1998.

[9] **Jean Marie A, Henri F**, Cours de mathématiques, Dunod, 1987.

[10] **Karim N, René D, Christophe R, Pierre L C**, Introduction à la logique : Théorie de la démonstration - Cours et exercices corrigés, Dunod, 2004.

[11] **Philippe C, El Haj L, Gérard E, Alain M**, Tous les exercices d'algèbre et de géométrie PC-PSI, Dunod, 2008.

[12] **Quinet J,** Cours élémentaire de mathématiques supérieures, tome 1 : Algèbre, 6e édition, Dunod, 1993.

[13] **Stéphane B, Frédéric S.**, Algèbre et analyse : Cours mathématiques de première années avec exercices corrigés, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2009.

[14] **Xavier G**, Les Maths en tête : algèbre, Ellipses Marketing, 1998.